СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Ж.-П. Рамис

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Институт Компьютерных Исследований

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Вышли в свет:

П. И. Голод, А. У. Климык. Математические основы теории симметрии
М. Громов. Гиперболические группы
М. Громов. Знак и геометрический смысл кривизны
Дж. Д. Мур. Лекции об инвариантах Зайберга – Виттена
Дж. Милнор. Голоморфная динамика
И. Р. Шафаревич. Основные понятия алгебры
И. Добеши. Десять лекций по вейвлетам
Э. Столниц, Т. ДеРоуз, Д. Салезин. Вейвлеты в компьютерной графике
К. Кассель, М. Россо, В. Тураев. Квантовые группы и инварианты узлов
Ж. П. Рамис. Расходящиеся ряды и асимптотические теории

Готовятся к печати:

О. В. Богопольский. Введение в теорию групп
А. Д. Морозов. Введение в теорию фракталов
С. П. Новиков. Топология
Я. Песин. Теория размерности
А. И. Шафаревич. Введение в теорию квазиклассического квантования изотропных многообразий

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PANORAMAS
ET
SYNTHÉSES

SÉRIES DIVERGENTES
ET
THÉORIES ASYMPTOTIQUES

Jean–Pierre RAMIS

Supplément au bulletin de la SMF
hors abonnement

TOME 121 ANNÉE 1993

Publié avec le concours du la Recherche et de l'Enseignement Supérieur

Жан-Пьер Рамис

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Перевод с французского
В. В. Шуликовской

Москва ♦ Ижевск

2002

УДК 517

Рамис Жан-Пьер.

Расходящиеся ряды и асимптотические теории. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 80 стр.

В книге известного французского специалиста в сжатой, компактной форме изложена современная асимптотическая теория и методы суммирования расходящихся рядов. Изложение вполне доступно для неспециалистов и снабжено различными примерами.

Для студентов и аспирантов математических специальностей университетов, специалистов по математическому анализу и динамическим системам.

ISBN 5-93972-169-9

http://rcd.ru

Оглавление

Break on through to the other side[1].
Jim Morrison

... all prohibitions are made only to be broken, must be broken[2].
A. S. Byatt. *Possession*

Введение

Эти два доклада[3] посвящены одной очень старой теме и нескольким из многочисленных недавних выводов из нее.

- В первой части мы покажем теоретическую и практическую эффективность применения расходящихся рядов на нескольких исторических примерах.
- Вторая часть будет посвящена строгому обоснованию теории расходящихся рядов, которым мы сегодня располагаем благодаря совсем недавним достижениям[4], и их связям с теорией асимптотических разложений.
- Мы завершим изложение — в третьей части — несколькими приложениями к динамическим алгебраическим (или аналитическим) системам.

---

[1] Прорывайся вперед, к другому берегу.

[2] ... все запреты, созданные только для того, чтобы их разрушить, надо разрушить.

[3] Этот текст взят из двух докладов, представленных автором в журналах X-UPS в 1991 году. Первая версия появилась в предварительных публикациях Математического Центра Политехнической Школы.

[4] С недавних пор эту теорию можно изложить с помощью средств элементарной и классической математики. Доказательства зачастую остаются долгими, техническими и тонкими, они требуют некоторых новых методов, которые невозможно изложить здесь.

1. Кое-что из истории расходящихся рядов

Речь пойдет не о том, чтобы развить полное историческое исследование применения расходящихся рядов в математике (эту работу еще предстоит сделать), но о том, чтобы на некоторых примерах показать важность предмета, констатировать эффективность этого применения, выделяя несколько методов и оставляя теоретические объяснения для второй части. С этой целью я решил описать несколько решающих этапов: Лейбниц, Эйлер, Коши, Стокс, Стильтьес, Пуанкаре, Борель и Харди. (К нынешним достижениям я вернусь позже.)

1.1. Суммирование расходящихся рядов: на что можно надеяться?

В работе над этим разделом я использовал замечательный обзор [Du]. Для начала я процитирую несколько фраз английского математика Дж. Э. Литлвуда, взятых из предисловия к посмертному изданию работ его друга:

Заголовок содержит любопытный отзвук прошлого, в том числе прошлого Харди. В 1828 году Абель писал: «Расходящиеся ряды — это изобретение дьявола, и постыдно основывать на них какое бы то ни было доказательство». *В последовавший период критического пересмотра результатов от расходящихся рядов просто отказались. Затем настало время, когда обнаружилось, что с ними все-таки иногда можно иметь дело. Сейчас это само собой разумеется, но в начале века эта тема, никоим образом не мистическая и вполне строгая, считалась сенсационной, что же касается нынешнего заголовка — как бесцветен в нем аромат парадокса и дерзости.*

Г. Х. Харди, *Расходящиеся ряды.* [H1]

Чаще всего к сходящимся рядам и их суммам прибегают с целью доказать числовые или функциональные равенства, такие как

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots,$$

$$\log 2 = -\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2} + \frac{1}{2^3 3} + \dots.$$

казать числовые или функциональные равенства, такие как

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots,$$

$$\log 2 = -\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2} + \frac{1}{2^3 3} + \ldots.$$

Интересно было бы упорядочить многочисленные равенства этого типа: второе из них, очевидно, лучше первого для приближенного вычисления $\log 2$, так как быстрее сходится. Отсюда стремление обобщить преобразования на случай расходящихся рядов и их возможные «суммы», чтобы увеличить арсенал имеющихся тождеств. Именно в таком духе работали математики XVIII века, в частности, Л. Эйлер. Разумеется, чтобы служить основанием для таких вычислений, суммирование расходящихся рядов должно подчиняться некоторым правилам: грубо говоря, нужно иметь возможность заменить — в вычислениях, содержащих обычные операции, — ряд на его сумму без противоречий.

Пусть $\mathcal{D}$ — это $\mathbb{C}$-алгебра числовых рядов с комплексными членами (сходящихся или нет): есть операции сложения, умножения на скаляр и произведение по Коши. Обозначим через $\mathcal{C}$ подалгебру *абсолютно сходящихся* рядов. Имеем гомоморфизм $\mathbb{C}$-алгебр

$$S\colon \mathcal{C} \to \mathbb{C},$$

который сопоставляет сходящемуся ряду $\sigma = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ его сумму $S(\sigma)$.

Мы хотим определить оператор суммирования S^* для «каких-то» расходящихся рядов. Вот первые правила для S^*, кажущиеся разумными (можно привести их и в другом варианте):

($s1$) Правило *регулярности*: если σ сходится, то

$$S(\sigma) = S^*(\sigma), \qquad \text{то есть } S^* \text{ продолжает } S.$$

($s2$) Правило *инвариантности по сдвигу*:

$$S^*\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) = a_0 + S^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right).$$

($s3$) S^* должен быть $\mathbb{C}$-линейным.

(s4) S^* — гомоморфизм по умножению.

На практике будет естественным определить приемы суммирования S_1^*, применимые к некоторым совокупностям рядов $\mathcal{D}_1\colon \mathcal{C} \subset \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$. Различаются случаи:

- $\mathcal{D}_1$ — векторное подпространство $\mathcal{D}$, и S_1^* удовлетворяет правилам 1, 2, 3;
- $\mathcal{D}_1$ — подалгебра $\mathcal{D}$, и S_1^* удовлетворяет правилам 1, 2, 3, 4.

Этот последний случай — очевидно, куда более полезный для генерации интересных тождеств — наиболее сложен при теоретическом обосновании (правило 4 нелегко проверить).

Возникает естественная идея заменять числовые ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ формальными рядами $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ и затем попытаться «положить $x = 1$».

Тогда мы получаем оператор суммирования S, определенный на дифференциальной[5] $\mathbb{C}$-алгебре сходящихся рядов $(\mathbb{C}\{x\};\, x^2 d/dx)$ и принимающий значения на дифференциальной $\mathbb{C}$-алгебре $(\mathcal{O}_0; x^2 d/dx)$ ростков функций, голоморфных в начале координат. Задача состоит в том, чтобы определить дифференциальные алгебры $\mathcal{A}_1$ формальных расходящихся рядов: $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathbb{C}[[x]]$ и операторы $S_1^*\colon \mathcal{A}_1 \to ?$, удовлетворяющие «разумным» правилам:

$(S1)$ Правило *регулярности*: S_1^* продолжает S.

$(S2)$ S_1^* — гомоморфизм дифференциальных алгебр.

$(S3)$ Если J — оператор «асимптотического разложения» (раздел 1.7), то JS_1^* — тождество на $\mathcal{A}_1$.

Остается решить, где принимает свои значения отображение

$$S_1^*\colon \mathcal{A}_1 \to ?.$$

Это не может быть $\mathcal{O}_0$: условие 3 влечет тогда $\mathcal{A}_1 = \mathbb{C}\{x\}$. В действительности мы увидим, что требуется «поляризация» за счет выбора направления d, исходящего из начала координат. Тогда получим $? = \mathcal{A}_d$ — дифференциальной $\mathbb{C}$-алгебре функций, голоморфных на ростках секторов, рассеченных направлением d (размыкание и лучи сколь угодно малы). Мы увидим, что для фиксированного направления d есть *два* «естественных» оператора суммирования S_d^+ и S_d^- (боковые суммирования). В то же время

[5] $\mathbb{C}$-алгебра называется дифференциальной, если она снабжена $\mathbb{C}$-линейным эндоморфизмом δ, который является производной: $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$.

для рядов с действительными членами хочется принять за ? ростки действительных аналитических функций на ростках из $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ или $\mathbb{R}^- - \{0\}$ в начале координат. Эта точка зрения сходна со взглядами Эйлера. Мы увидим, что она приводит к определенным затруднениям.

Вернемся к числовым рядам и рассмотрим два примера:

$$\sigma_0 \colon 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$
$$\sigma_1 \colon 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots.$$

Предположим, что эти ряды принадлежат совокупности рядов $\mathcal{D}_1$, снабженной оператором суммирования S^*, удовлетворяющим условиям (s2) и (s3), и обозначим суммы наших двух рядов S_0 и S_1 соответственно. Имеем $S_0 = 1 - S_0$, откуда $S_0 = \frac{1}{2}$ и

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots \\ &= 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots, \end{aligned}$$

откуда $2S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ и $S_1 = \frac{1}{4}$. Итак,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2},$$
$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots = \frac{1}{4}.$$

По-видимому, Лейбниц был первым, кто приписал сумме $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ значение $\frac{1}{2}$.

Все время рассматривая наши два примера, можно угадать два способа суммирования, кажущиеся разумными и позволяющие оправдать только что проведенное чисто формальное рассуждение. Эти два способа — дающие возможность больших обобщений — *суммирование в среднем и суммирование Абеля.*

Суммирование в среднем

Идея этого суммирования — в попытке построить *положительную меру $d\ell$ полной массы* 1 на подмножествах $\mathbb{N}$ и определить сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ как

$$\int s_n d\ell(n),$$

где s_n обозначает частичную сумму

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} a_p.$$

Результат не должен зависеть от первых членов ряда. Следовательно, мера должна обращаться в 0 на любом конечном подмножестве $\mathbb{N}$, что приводит к противоречию, если предполагать меру σ-аддитивной! Итак, приходится ослабить требования и заменить понятие меры на понятие *плотности* [FGA]. Если ℓ — подобная плотность, обозначим $\ell(E)$ массу E подмножества $\mathbb{N}$ (если она существует). Проще всего построить такую плотность, используя среднее арифметическое по Чезаро: распределить единичную массу между $n+1$ точкой $0, \ldots, n$[6] и перейти к пределу по n. Средние

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1},$$

соответствующие ряду $1-1+1-1+1-1+\ldots$, стремятся к $\frac{1}{2}$ при $n \to +\infty$ (s_n принимает значения 1 и 0 поочередно).

Если обозначить через E множество четных чисел, получим $\ell(E) = \lim \mu_n(E) = \frac{1}{2}$.

Ряд $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$ этим способом не суммируется. Но, применив этот способ дважды, получим в качестве суммы $\frac{1}{4}$.

В более общем случае для каждого целого n можно распределить единичную массу по некоторому *конечному* подмножеству $\mathbb{N}$ и предполагать, что если E конечно, то $\ell(E) = 0$. Если, кроме того, предположить, что μ_n сосредоточена на отрезке $[1, n]$, задача сведется к заданию *правильной теплицевой матрицы*, то есть бесконечной треугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & 0 & \ldots \end{pmatrix},$$

[6]Соответствующая мера равна $\mu_n = (\delta_0 + \ldots + \delta_n)/(n+1)$.

коэффициенты которой — положительные действительные числа, суммы по строкам тождественно равны 1, а столбцы представляют собой последовательности, сходящиеся к нулю. Тогда матрица-столбец, составленная из t_n, получается умножением A на матрицу-столбец частичных сумм s_n.

Композиция двух суммирований в среднем, очевидно, соответствует произведению матриц. Например,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

соответствует методу Чезаро, а

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ \frac{11}{18} & \frac{5}{18} & \frac{2}{18} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

— его использованной выше итерации.

Преобразование Эйлера соответствует теплицевой матрице:

$$T = \begin{pmatrix} C_0^1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}C_1^0 & \frac{1}{2}C_1^1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{1}{2^n}C_n^0 & \frac{1}{2^n}C_n^1 & \dots & \frac{1}{2^n}C_n^n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Это преобразование усредняет ряды путем преобразования

$$b_n = \frac{1}{2^{n+1}}(C_n^0 a_0 + C_n^1 a_1 + \ldots + C_n^n a_n).$$

Оно усредняет формальные ряды, связанные с гомографическим преобра-

зованием (считая 1 неподвижной точкой):

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \hat{g}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n, \qquad \hat{g}(y) = \widehat{f}\Bigl(\frac{\frac{1}{2}y}{1 - \frac{1}{2}y}\Bigr).$$

Это преобразование было введено Эйлером как *ускоряющее сходимость*. Например, для ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

оно дает

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2} + \frac{1}{2^3 3} + \ldots,$$

что ускоряет вычисление $\log 2$.

Вместо того чтобы использовать меры μ_n с параметром $n \in \mathbb{N}$ и конечным носителем, можно использовать меры μ_t с параметром $t > 0$ и произвольным носителем. Основным примером служит *плотность Бореля*, связанная с семейством мер Пуассона:

$$\mu_t = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \delta_n.$$

Этот метод, возникший благодаря Борелю (1899), сопоставляет ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ в качестве суммы предел (если он существует)

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} S(t), \quad \text{где} \quad S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{t^n}{n!}.$$

В дальнейшем мы вернемся к этому фундаментальному методу. Применяя его к «ряду Лейбница» $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, найдем

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} \operatorname{ch} t = \frac{1}{2}.$$

Методы Абеля

Описав методы усреднения, переходим к *методам Абеля*. Самый простой из них основан на теореме Абеля: если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то его сумма задается равенством

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Отсюда идея — которую можно найти у Эйлера — для некоторых расходящихся рядов принять за определение суммы ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ предел (если он существует)

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

- Применяя этот метод к ряду Лейбница, находим

  $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

  как и ожидалось.

- Для ряда $1-2+3-4+5-6+\ldots$ находим

  $$1-2x+3x^2+\ldots = \frac{1}{(1+x)^2}$$

  с пределом $\frac{1}{4}$.

Этот метод обобщается следующим образом. Полагаем $x = e^{-t}$, тогда $x^n = e^{-tn}$. Пусть $\{\lambda_n\}$ — данная *строго возрастающая последовательность* строго положительных действительных чисел, стремящаяся к $+\infty$. Сопоставляем ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ функцию

$$f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-t\lambda_n}$$

(если она существует для всех достаточно малых $t > 0$) и — обязательно при условии существования — *определяем* сумму как

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-t\lambda_n}.$$

В дальнейшем мы остановимся на следующих примерах:

$$\lambda_n = \begin{Bmatrix} 0 & \text{если } n = 0 \\ n \log n & \text{если } n > 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(Линделеф);}$$

$$\lambda_n = \begin{Bmatrix} 0 & \text{если } n = 0,\, 1,\, 2 \\ n \log n \log(\log n) & \text{если } n > 2 \end{Bmatrix} \qquad \text{(Харди [H2], 1941).}$$

1.2. Функциональное уравнение для ζ-функции. Ряд Эйлера

Более детальное рассмотрение изложенных ниже вопросов можно найти в [H1] и [Bar]. Мемуар Л. Эйлера [Eu1] начинается так:

Соотношение, которое я собираюсь здесь рассмотреть, касается сумм следующих двух обобщенных бесконечных рядов:

$$1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \ldots,$$

$$\frac{1}{1^m} - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} - \frac{1}{8^m} + \ldots.$$

Задачей Эйлера было изучение равенства

$$\frac{1^{s-1} - 2^{s-1} + 3^{s-1} - \ldots}{\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \ldots} = -\frac{(s-1)!(2^s - 1)}{(2^{s-1} - 1)\pi^s} \cos\Bigl(\frac{1}{2} s\pi\Bigr).$$

Точнее, он собирался «проверить» это равенство для всех целых s, для $s = \frac{1}{2}$ и $s = \frac{3}{2}$. Для этого нужно суммировать расходящиеся ряды

$$1^m - -2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \ldots.$$

Эйлер использует метод Абеля. Для $m = 0$ и 1 он получил два изученных выше ряда с суммами $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ соответственно. В более общем случае он получает при $k > 1$

$$1^{2k} - 2^{2k} + 3^{2k} - \ldots = 0,$$

$$1^{2k-1} - 2^{2k-1} + 3^{2k-1} - \ldots = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} - 1}{2k} B_k.$$

В случае $\operatorname{Re} s > 0$ ζ-функция Римана определена равенством

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \ldots.$$

Сопоставим ей функцию

$$\eta(s) = 1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - \dots .$$

Имеем

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-S})\zeta(s),$$

и знаменитое функциональное равенство Б. Римана для ζ-функции запишется в виде

$$(2^{s-1} - 1)\eta(1 - S) = -(2^s - 1)\pi^{-s}\cos\Big(\frac{1}{2}s\pi\Big)\Gamma(s)\eta(s).$$

Мы узнаем тождество, угаданное Эйлером за сто лет до Римана.

Заметим, что теоретический подсчет, основанный на использовании сумм расходящихся рядов, приводит к *строгому доказательству* формулы в случае целых s. (Эйлер не намеревался приводить такое доказательство.)

Метод, которым Эйлер обосновывал возможность вычислений с помощью расходящихся рядов, во многом взят из его исследования ряда Эйлера:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!.$$

Это обоснование, по большей части «экспериментальное», очень любопытно. Много деталей, связанных с этим примером, можно найти в [Bar]. В современных терминах общую идею Эйлера можно изложить следующим образом: пусть дан ряд с общим членом a_n; следует найти *программу* (или *программы*), порождающие a_n. Процитируем Эйлера (1749):

Но я уже отмечал по другому поводу, что слову «сумма» надо придать более широкое значение и понимать под ним дробь или другое аналитическое выражение, которое, будучи разложено [*в ряд*] *согласно принципам анализа, приводит к тому же самому ряду, чью сумму мы ищем.*

В другом месте он пишет:

...summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur[7].

[7] ... сумма некоторого ряда — это значение конечного выражения, чье разложение приводит к данному ряду.

В [Eu2] Эйлер описал четыре (новых) способа для суммирования ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!$. Путем прямого подсчета можно проверить, как согласуются эти разные приближения. Мы не будем описывать эти способы (что очень хорошо сделано в [Bar]). В связи с ними нас больше всего интересует тот факт, что соответствующий формальный ряд

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! x^{n+1}$$

является *формальным решением* дифференциального уравнения Эйлера

$$x^2 y' + y = x.$$

Среди других методов рассмотрим преобразование в непрерывную сходящуюся дробь

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{3}{1} + \ldots,$$

и итерация преобразования Эйлера следует из суммирования до наименьшего члена, описанного в следующем параграфе. (Этот метод очень хорошо объяснен в трактате по анализу, принадлежащем Лакруа.) Метод, основанный на дифференциальном уравнении Эйлера, связан с *суммированием Бореля–Лапласа* и будет играть основополагающую роль в дальнейшем. (Само же суммирование Бореля–Лапласа связано с борелевской плотностью, описанной выше [H1].)

Позднее Харди [H2] суммировал ряд Эйлера, используя описанный выше метод Абеля:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\Big(x - 1!x^2 + 2!x^3 + \sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n n! x^{n+1} e^{-tn\log n \log(\log n)}\Big).$$

1.3. Эйлер, Коши, Пуанкаре и суммирование до наименьшего члена

В начале главы VIII второго тома «Новых методов небесной механики» [P] А. Пуанкаре пишет:

Между геометрами и астрономами есть определенного рода недоразумения в связи со значением слова ***сходимость****. Геометры, озабоченные совершенной строгостью и зачастую слишком безразличные к громоздкости запутанных вычислений, с помощью которых они обосновывают*

возможность, не задумываясь о ее эффективном использовании, говорят, что ряд сходится, когда сумма членов стремится к определенному пределу, даже если первые члены убывают слишком медленно. Астрономы, напротив, имеют привычку говорить, что ряд сходится, когда, к примеру, двадцать первых членов убывают очень быстро, даже если следующие члены должны неопределенно возрастать. Так, в качестве простого примера рассмотрим два ряда с общими членами $1000^n/n!$ *и* $n!/1000^n$.

Геометры скажут, что первый ряд сходится, причем быстро,...; но второй ряд они сочтут расходящимся...

Астрономы, напротив, сочтут первый ряд расходящимся,... а второй — сходящимся.

Оба эти правила корректны: первое — для теоретических исследований, второе — для численных приложений.

Итак, можно говорить о сходящихся рядах «в смысле геометров» или «в смысле астрономов». Заметим, что на практике, в приложениях, можно констатировать, что прежде всего сходящиеся «в смысле астрономов» ряды имеют очень быстро возрастающий общий член, хотя изначально он убывал. Итак, то, что Пуанкаре рассматривал как *возможность*, на самом деле — правило. Он не отдавал себе отчет в этом явлении — хотя был очень хорошо с ним знаком, — приводя определение асимптотических разложений. Наибольшие недостатки теории Пуанкаре связаны с этим замечанием. Чтобы преодолеть их, надо обратиться к работам других математиков. Уже упомянутый нами ряд Эйлера $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! x^{n+1}$ (смежный с рядом, на который ссылается Пуанкаре) позволит нам начать понимать, что надо делать. В конце концов мы получим теорию, *точную асимптотическую теорию*, в которой противоречие между двумя отмеченными Пуанкаре понятиями сходимости исчезнет.

Следующий анализ ряда Эйлера считается классическим (ср., например, Олвера [O]). Пусть

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt.$$

Заметим, что

$$f_n(x) = x - 1!x^2 + 2!x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!x^n,$$

$$R_n(x) = (-1)^n \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t/x}}{1+t} dt.$$

Легко проверить, что

$$f(x) = f_n(x) + R_n(x),$$

$$|R_n(x)| < \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t/x} dt = n!x^{n+1}.$$

Итак, остаток $R_n(x)$ имеет тот же знак, что и первое из опущенных слагаемых $(-1)^n n!x^n$, и его модуль мажорируется модулем этого слагаемого. Рассуждая как в случае знакочередующегося ряда при проверке «особого критерия», получаем оценки

$$f_{2p}(x) < f(x) < f_{2p+1}(x)$$

для всех целых $p > 1$.

Если $x > 0$ фиксировано, то это не позволяет (как в случае проверки особого критерия для ряда, общий член которого стремится к нулю) получить сколь угодно точную оценку для $f(x)$ (здесь общий член быстро стремится к $+\infty$). Но мы получаем оценку, качество которой *зависит* от x. Точнее, мы увидим, что она экспоненциально хороша, когда x «мало».

Ясно, что при *фиксированном* $x > 0$ наилучшее приближение $f(x)$ последовательностью $f_n(x)$ получается (этим методом), когда скачок

$$|f_{2p+1}(x) - f_{2p}(x)| = (2p)!x^{2p} -$$

наименьший из возможных, то есть когда общий член ряда Эйлера $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n n!x^{n+1}$ — *наименьший из возможных* по абсолютной величине. В таком случае есть смысл *остановить* суммирование на соответствующем индексе: это и есть *суммирование до наименьшего члена.*

Здесь отношение двух последовательных членов равно nx по абсолютной величине. Если фиксированное $x > 0$ «мало», а n меняется, то это

соотношение меньше 1 при $n < x^{-1} - 1$ и больше 1 при $n > x^{-1} - 1$. Итак, общий член убывает до $n = N \simeq x^{-1}$, а затем неопределенно возрастает. При малых x получаем ряд, сходящийся в смысле астрономов. Качество аппроксимации равно $N!x^N \simeq N!N^{-N}$. По формуле Стирлинга,

$$N! \sim \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N},$$

и мы видим, что порядок аппроксимации равен

$$\sqrt{2\pi N} e^{-N} \simeq \sqrt{2\pi/x} e^{-1/x},$$

то есть *экспоненциален.*

Следуя концепции, выдвинутой Пуанкаре в 1886 году (раздел 1.7), скажем, что ряд Эйлера

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{n+1}$$

это *асимптотическое разложение* функции

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t}\, dt$$

в начале координат.

На практике — в многочисленных случаях, когда асимптотическое разложение имеет *действительные знакочередующиеся коэффициенты*, — знак погрешности совпадает со знаком первого из опущенных слагаемых, а ее модуль мажорируется модулем этого слагаемого. Сделанный нами анализ можно продолжить. Точно так же можно констатировать, что ошибка столь же мала, как экспонента некоторого порядка (то есть как $e^{-x^{-k}}$ при подходящем целом k). Например, как показал Коши [C], это имеет место для *ряда Стирлинга*

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1) z^{2r-1}}\ .$$

Большее удивление вызывает тот факт, что суть предыдущего результата, то есть что *суммирование до наименьшего члена обеспечивает экспоненциальную точность* (возможно, некоторого порядка k), приложима на практике к асимптотическим разложениям с комплексными членами в гораздо более общем случае, чем к знакочередующимся разложениям. Этот факт

устанавливался экспериментально в течение нескольких веков, он широко используется математиками, физиками и астрономами, хотя и не получил удовлетворительного объяснения вплоть до недавнего времени, в результате систематического изучения *асимптотических разложений Жевре* (раздел 2.1).

На практике установлено, что наименьший член часто получается при $N \simeq a/x$ (или $N \simeq a/x^k$), где $a > 0$ зависит от задачи. В задачах, требующих тонких оценок, по-видимому, сложно предвидеть точный номер наименьшего члена (или наименьшего уже неподходящего члена). Тогда берут «псевдонаименьший член» при фиксированном $x \in \mathbb{C}$, *выбирая* в качестве N целую часть $\frac{a}{|x^k|}$ (где k и a зависят от структуры изучаемой задачи).

1.4. Стокс и каустики. Феномен Стокса[8]

Еще в начале XIX века английский физик Стокс хорошо понимал различие между рядами, сходящимися в смысле геометров и в смысле астрономов. О первых он часто говорил, что они «сперва расходятся, а затем сходятся», а о вторых — что они «сперва сходятся, а затем расходятся». Более того, он заметил тот существенный момент, о котором мы говорили выше (и который, по-видимому, полностью ускользнул от Пуанкаре): суммирование до наименьшего члена в общем случае имеет *экспоненциальную точность*. И поэтому вычисления с помощью расходящихся рядов парадоксальным образом оказываются гораздо точнее и быстрее, чем с использованием сходящихся рядов! Стокс дает очень красивую иллюстрацию этого принципа, вычисляя (с помощью расходящихся рядов) каустические полосы в волновой оптике.

Каустики — это огибающие световых лучей в геометрической оптике. В волновой оптике наблюдатель помещается на малом перпендикуляре к каустике, и требуется определить, где находятся полосы, то есть где обращается в нуль функция *интенсивности света*.

Теория — созданная английским астрономом Эйри — позволяет показать, что в подходящих единицах измерения интенсивность света на попе-

[8]Можно также говорить *явление Стокса*. — *Прим. ред.*

речнике пропорциональна квадрату интеграла (интеграла Эйри)

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \cos\Big(\frac{1}{3}t^3 + zt\Big)\, dt,$$

где z — параметр, зависящий от положения поперечника и обращающийся в нуль на каустике.

В связи с этой задачей ставились замечательные физические опыты: Миллер измерил положение 25 первых полос с точностью почти до четырех десятичных знаков. Следовало сопоставить теоретические величины (то есть нули функции Ai) с экспериментальными. Первый результат принадлежал Эйри: используя формулы квадратур и таблицы логарифмов с десятью десятичными знаками, он получил правильное значение (до четырех десятичных знаков) для положения первой полосы. Теперь следует заметить, что функция Эйри — это *решение дифференциального уравнения Эйри*

$$y'' - zy = 0.$$

Этот факт позволяет получить разложение $Ai(z)$ в сходящийся ряд в начале координат (то есть по возрастающим степеням z):

$$Ai(z) = 3^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{9^n n! \Gamma\Big(n + \frac{2}{3}\Big)} - 3^{-4/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{9^n n! \Gamma\Big(n + \frac{4}{3}\Big)}.$$

Функция Ai — целая, так как область сходимости этого ряда бесконечна. Он сходится в смысле геометров! Используя этот ряд, Эйри находит положение второй полосы. Вычисления трудоемки: хотя ряд сходится, но сперва он расходится... До успеха, достигнутого опытным путем, было еще далеко, когда появился Стокс. У последнего была во всех отношениях замечательная идея: найти разложение функции Ai на *бесконечности* вместо нуля (то есть по возрастанию степеней $1/z$). Он получил это разложение с помощью дифференциального уравнения Эйри.

Заметим, что это разложение несколько сложнее, чем просто ряд, и еще следует добавить, что оно берется не по z, а по одной из *ветвей* $z^{1/4}$. Последний факт поставил перед Стоксом задачу, на которую ему пришлось потратить многие годы. (Решение — открытие *явления Стокса* — было сде-

лано в три часа утра мартовской ночью 1857 года[9] [Sto3].) Функция $Ai(z)$ допускает следующее выражение для своего асимптотического разложения на бесконечности:

$$\frac{1}{\pi^{3/2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3t^{3/2}}} 3^{-\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\Big(n+\frac{5}{6}\Big)\Gamma\Big(n+\frac{1}{6}\Big)}{n!} \Big(\frac{3}{4}\Big)^n (-z)^{-\frac{3n}{2}}.$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\Big(n+\frac{5}{6}\Big)\Gamma\Big(n+\frac{1}{6}\Big)}{n!} \Big(\frac{3}{4}\Big)^n (-z)^{-\frac{3n}{2}}$$

расходится (в смысле геометров!), но сходится в смысле астрономов, если z не слишком мало. Это позволило Стоксу очень легко вычислить положение всех полос с четыремя верными знаками, за исключением первой полосы, где было только три верных знака и где Стокс проигрывал в сравнении с Эйри (z слишком мало). Совпадение с опытом было полным, но теория — чрезвычайно эффективная количественно — оставалась теоретически необоснованной.

1.5. Суммирование сходящихся рядов вне их области сходимости: Борель, Линделеф, Харди

Пусть $\widehat{f}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ — *сходящийся* ряд с радиусом сходимости $R > 0$. Пусть $x_0 \in \mathbb{C}$ таково, что $|x_0| > R$. Нам нужно найти сумму расходящегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$.

Для этого можно попытаться использовать *аналитическое продолжение* суммы f, соответствующей ряду $\widehat{f}$, вне области сходимости. Это даст нам метод суммирования, «хороший» в указанном выше смысле, так как

[9] Лондон, март, 19/57. Кот из дома — мыши в пляс. Ты кошка, а я бедный мышонок. Я делал то, что, как я думаю, ты бы не позволила мне сделать во времена семейной жизни, я сидел до трех часов утра, мужественно сражаясь с математическими сложностями. Несколько лет назад я атаковал интеграл Эйри и после сурового разбирательства свел его к легко вычисляемому виду. Но там была сложность, которую я не смог преодолеть, хотя почти заболел от попыток сделать это, и наконец мне пришлось забросить ее и признать себя неспособным ее победить. Несколько дней назад я вновь принялся за нее, и после двух- или трехдневного сражения, причем в последний день я сидел до трех, я наконец победил ее. . .

аналитическое продолжение сохраняет суммы, произведения и производные и является инъекцией.

Пытаясь сделать этот метод более точным, мы немедленно сталкиваемся с проблемами существования (возможно, не существует непрерывного пути γ, связывающего начало координат с x_0 и такого, чтобы функцию f можно было аналитически продолжить вдоль γ; в худшем случае f вообще нельзя продолжить вне ее области сходимости) и единственности (аналитические продолжения вдоль разных путей могут дать разные результаты).

В этом разделе мы ограничимся только продолжениями вдоль отрезка $\gamma = [0, x_0]$, связывающего начало координат с x_0. Используя эти продолжения, продолжим функцию f аналитически на наибольшую (включающую область сходимости) открытую звезду (относительно начала координат), называемую *звездой Миттаг–Леффлера* для ряда f. Обозначим эту область $Et(\widehat{f})$. Обозначим $(f, Et(\widehat{f}))$ аналитическое продолжение f (определенной на области $\{|x| < R\}$) на $Et(\widehat{f})$. Сразу проверяем — то есть предоставляем читателю возможность проверить, — что оператор «суммирования»

$$\widehat{f} \mapsto (f, Et(\widehat{f}))$$

— инъективный гомоморфизм дифференциальных алгебр.

Все вышесказанное снабжает нас (в некоторых случаях) хорошим теоретическим методом суммирования ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$, но, очевидно, хотелось бы располагать «явным» методом вычисления соответствующей суммы $f(x_0)$ (то есть одним или несколькими алгоритмами ее вычисления, лучше всего — с возможностью программирования на машине и приводящими к результату, точному в разумных пределах, за разумное время). Я изложу некоторые из этих методов, не занимаясь здесь их вычислительной эффективностью.

Сперва заметим, что само аналитическое продолжение (если вспомнить его определение) приводит к явному численному алгоритму, который можно использовать на ЭВМ [CC]. Алгоритм сводится к конечному числу этапов следующего типа. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_1)^n$ сходится с радиусом сходимости $R_1 > 0$. Возьмем тогда x_2, где $|x_2 - x_1| < R_1$. В окрестности x_2 имеем

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_2)^n,$$

и остается вычислить b_n как функции от a_n. Ясно, что это возможно, но при этом используются сходящиеся ряды. Так что получается ступенчатый процесс.

Перейдем к другим методам. Кажется разумным использовать абелевы методы суммирования, о которых мы говорили выше. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — данная строго возрастающая последовательность строго положительных действительных чисел, стремящаяся к $+\infty$. Ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сопоставим функцию

$$f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-t\lambda_n}$$

(если она существует при достаточно малых t). Теперь остается изначально выбрать последовательность $\{\lambda_n\}$ так, чтобы ряд, определяющий $f_t(x)$, сходился. Зная о сходимости данного ряда $\widehat{f}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, получаем неравенства вида

$$|a_n| < CA^n$$

для подходящих $C > 0$ и $A > 0$. Сразу находим простую последовательность Λ такую, что ряд, определяющий $f_t(x_0)$, сходится для всех $t > 0$ и всех $x_0 \in \mathbf{C}$:

$$\lambda_n = \begin{Bmatrix} n \log n & \text{если } n > 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{Bmatrix} \qquad \text{(Линделеф).}$$

У этого метода есть варианты:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x_0^n}{\Gamma(1+\delta n)} \qquad \text{(Миттаг–Леффлер);}$$

$$\lim_{\zeta \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\zeta n)}{\Gamma(1+n)} a_n x_0^n \qquad \text{(Леруа).}$$

Имеем следующие результаты:

Теорема (см. [H1], 4.11, p. 77–79). *Пусть* $\widehat{f} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *— сходящийся ряд. Пусть* x_0 *— точка, принадлежащая звезде Миттаг–Леффлера для* f. *Обозначим* $f(x_0)$ *значение аналитического продолжения (обычной) суммы ряда* $\widehat{f}$ *в этой точке. Тогда*

(i) *Если* $\lambda_n = n\log n$ *при* $n > 0$ *и* $\lambda_0 = 0$, *тогда предел*

$$\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n e^{-t\lambda_n}$$

существует и равен $f(x_0)$.

(ii) *Предел*

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x_0^n}{\Gamma(1+\delta n)}$$

существует и равен $f(x_0)$.

(iii) *Предел*

$$\lim_{\zeta\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\zeta n)}{\Gamma(1+n)}a_n x_0^n$$

существует и равен $f(x_0)$.

Иначе говоря, методы Линделефа, Миттаг–Леффлера и Леруа позволяют суммировать сходящийся ряд $\widehat{f}$ в его звезде Миттаг–Леффлера.

Ясно, что эти методы применимы при как максимум геометрическом возрастании a_n. Они неприложимы к ряду Эйлера $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n! x^{n+1}$. Пытаясь суммировать расходящийся ряд этого типа методами Абеля, нужно выбирать последовательность Λ, возрастающую «гораздо быстрее». Следующая последовательность (подобранная Харди [H2], 1941) хорошо приспособлена к ряду Эйлера и рядам с аналогичным типом возрастания коэффициентов [10] (ряды Жевре (Gevrey), раздел 2.1):

$$\lambda_n = \begin{cases} n\log n(\log(\log n)) & \text{если } n > 2\\ 0 & \text{если } n = 0,\ 1,\ 2.\end{cases}$$

Прежде чем проверять эффективность соответствующего метода для расходящихся рядов, естественно будет проверить его на сходящихся рядах! Вот что позволяет утверждать следующий результат (Харди):

Теорема (см. [H2]). *Пусть* $\widehat{f} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *— сходящийся ряд. Пусть* x_0 *— точка, принадлежащая звезде Миттаг–Леффлера для* f. *Обозначим* $f(x_0)$

[10]Возрастание вида $|a_n| < C(n!)^s A^n$, где $C,\ A,\ s > 0$.

значение аналитического продолжения (обычной) суммы ряда $\widehat{f}$ в этой точке. Выберем $\lambda_n = n \log n \log(\log n)$, если $n > 2$, и $\lambda_n = 0$, если $n = 0, 1, 2$. Тогда предел

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n e^{-t\lambda_n}$$

существует и равен $f(x_0)$.

В дальнейшем мы увидим, что этот метод суммирования Харди (недавно вновь открытый и обобщенный профессором Жюрка (Jurkat)) очень эффективен: с его помощью находятся суммы «мультисуммируемых» рядов в их «обобщенной звезде Миттаг–Леффлера» [J].

Предыдущие две теоремы сперва были доказаны в случае геометрической прогрессии $\widehat{f}(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$ с суммой $(1 - x)^{-1}$. Затем можно легко перейти к общему случаю, используя теорему Коши.

В дальнейшем мы увидим, что многие решения аналитических функциональных уравнений в формальных рядах мультисуммируемы (например, в случае решений аналитических дифференциальных уравнений). К сожалению, формальные ряды, являющиеся решениями аналитических q-дифференциальных уравнений (даже линейных), имеют вид не Жевре, но только q-Жевре (раздел 3.4). (Имеются оценки вида $|a_n| < Cq^{n^2}A^n$ с $q > 1$ и $A > 0$.) Итак, эти ряды не мультисуммируемы. Тем более ясно, что к ним нельзя применить метод суммирования Харди. Тогда можно попытаться выбрать последовательность Λ, возрастающую еще быстрее, например, $\lambda_n = \mu n^2$ или, в более общем виде, $\lambda_n = \mu n^a$ (с $\mu > 0$ и $a > 1$). Соответствующие абелевы методы суммирования недавно были изучены А. Фрушаром (A. Fruchard) [F2].

К сожалению (как предостерегал Харди по случаю абелевых методов суммирования, определенных для слишком быстро возрастающих последовательностей Λ), соответствующие методы суммирования уже не позволяют находить сумму сходящегося ряда в его звезде Миттаг–Леффлера, но, в общем случае, только в гораздо меньшей области. Это видно уже на примере геометрической прогрессии: получается не вся звезда (здесь: $\mathbb{C} - [1; +\infty]$), но только область, в которую переходит левая часть полосы $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ без двух прямых $\mathbb{R}e^{i\pi/2a}$ и $i + \mathbb{R}e^{i\pi/2a}$ под действием экспоненты. (Можно получить и всю звезду Миттаг–Леффлера, устремляя параметр a к 1 при фиксированном x_0, принадлежащем звезде.)

Вспомним теперь о методе суммирования по борелевской плотности, изложенном в разделе 1.1, в применении к целому сходящемуся ряду $\widehat{f}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ с радиусом сходимости $R > 0$. Пусть x — комплексное число, удовлетворяющее условию $|x| < R$. Для $t > 0$ положим

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p, \qquad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} S_n, \qquad F(t) = e^{-t} S(t).$$

Имеем

$$F'(t) = e^{-t}(S'(t) - S(t)) = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} \frac{t^n}{n!},$$

откуда

$$\begin{aligned} F(t) = a_0 + \int_0^t F'(t) = a_0 + \int_0^t e^{-u} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{x^{n+1} u^n}{n!}\, du = \\ = a_0 + \int_0^t e^{-u} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{(xu)^n}{n!}\, d(xu) = \\ = a_0 + \int_0^{t\xi} e^{-\xi/x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{\xi^n}{n!}\, d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда легко выводим, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \lim_{t \to +\infty} F(t) = a_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\xi/x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{\xi^n}{n!}\, d\xi.$$

Чтобы упростить дальнейшее изложение, предположим, что $a_0 = 0$ (отсюда легко перейти к общему случаю). Принимая во внимание предыдущие вычисления, приходим к рассмотрению *борелевского преобразования формального ряда* $\widehat{f}$: $\hat{\mathcal{B}}\widehat{f} = \hat{\phi}$, где

$$\hat{\phi}(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ряд $\hat{\phi}$ имеет бесконечный радиус сходимости; поэтому его сумма ϕ — *целая функция*. Можно проверить, что *скорость ее возрастания экспоненциальна, не более чем первого порядка*. Имеем

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \mathcal{L}(\phi)(x) = \int\limits_0^{+\infty} \phi(\xi) e^{-\xi/x}\, d\xi.$$

Итак, можно найти сумму f ряда $\widehat{f}$ в его области сходимости как преобразование Лапласа целой функции ϕ.

В более общем случае можно заменить «контур интегрирования» $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty]$ в интеграле Лапласа на произвольный луч d, исходящий из начала координат. Получаем

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \mathcal{L}_d(\phi)(x) = \int\limits_d \phi(\xi) e^{-\xi/x}\, d\xi.$$

Сейчас мы увидим, что этот формализм часто можно использовать, получая также сумму ряда $\widehat{f}$ в некоторой части его звезды Миттаг–Леффлера, вне области сходимости.

Для $x \in \mathbb{C}$ назовем *областью Бореля*, соответствующей точке x, замкнутый круг с диаметром $[0, x]$. Обозначим его D_x. Получаем следующий результат:

Теорема ([Bo1]). *Пусть $\widehat{f}$ — сходящийся ряд. Если x_0 — отличная от нуля точка звезды Миттаг–Леффлера ряда $\widehat{f}$ такая, что область Бореля D_{x_0} содержится в звезде $Et(\widehat{f})$, и если ϕ — сумма формального борелевского преобразования ряда $\widehat{f}$, а d — луч, исходящий из начала координат и содержащий x_0, то интеграл*

$$\mathcal{L}_d(\phi)(x) = \int\limits_d \phi(\xi) e^{-\xi/x}\, d\xi$$

сходится и равен $f(x_0)$.

К сожалению, процедура суммирования методом Бореля–Лапласа не позволяет в общем случае вычислить $f(x_0)$ в каждой точке x_0 звезды Миттаг–Леффлера ряда $\widehat{f}$, но только в подходящей открытой выпуклой области,

лежащей в звезде и содержащей область сходимости. В простейших случаях получаем выпуклый многоугольник (ограниченный или нет). Например, для геометрической прогрессии находим полуплоскость $\{\mathrm{Re}\, x < 1\}$.

На самом деле ряд $\widehat{f}$ легко суммировать во всей его звезде Миттаг–Леффлера, если в методе суммирования Бореля–Лапласа ввести переменный параметр и получить так называемый *метод суммирования Бореля–Лапласа* k-го уровня. Пусть $k > 0$. Введем оператор разветвления, рассматривая функции (определенные на римановой поверхности логарифма) $\rho_k(f)(x) = f(x^{1/k})$. Положим $\hat{\mathcal{B}}_k = (\rho_k)^{-1}\hat{\mathcal{B}}_k\rho_k$ и $\mathcal{L}_{k;d} = (\rho_k)^{-1}\mathcal{L}_{d^k}\rho_k$ (где направление d^k соответствует d для разветвления ρ_k).

Обозначим D_k образ борелевской области D при конформном преобразовании $x \mapsto x^{1/k}$. Если $0 < k < \frac{1}{2}$, этот образ берется на римановой поверхности логарифма. При $k = 2$ образ D_2 ограничен полулемнискатой Бернулли. Мы будем говорить, что D_k — это k-область Бореля, и k-область Бореля «диаметра» $[0, x_0]$ обозначим D_{k,x_0}.

Теорема. *Пусть $k > 0$, а $\widehat{f}$ — сходящийся ряд. Если x_0 — отличная от нуля точка звезды Миттаг–Леффлера ряда $\widehat{f}$ такая, что k-область Бореля D_{x_0} содержится в звезде $Et(\widehat{f})$, и если ϕ — сумма формального борелевского преобразования $\hat{\mathcal{B}}_k(\widehat{f})$ ряда $\widehat{f}$, а d — луч, исходящий из начала координат и содержащий x_0, то интеграл*

$$\mathcal{L}_{k;d}(\phi)(x)$$

сходится и равен $f(x_0)$

При $\frac{1}{2} < k$ угол k-области Бореля в начале координат равен π/k. Чем больше k, тем сильнее «разрежены» k-области Бореля. Легко видеть, что, так как x_0 — фиксированная точка звезды $\mathrm{E}t(\widehat{f})$, всегда существует действительное $k_0 > 0$ такое, что для всех $k > k_0$ k-область Бореля содержится в звезде. Тогда можно вычислять $f(x_0)$, используя интегральный метод Бореля–Лапласа произвольного уровня $k > k_0$.

Если обозначить S оператор суммирования сходящегося ряда в его области сходимости, то только что описанные нами методы суммирования выражаются через операторы суммирования (по направлению d):

$$S_d = \mathcal{L}_d S\hat{\mathcal{B}} \qquad \text{(Борель-Лаплас);}$$

$$S_{k;d} = \mathcal{L}_{k;d} S\hat{\mathcal{B}}_k \quad \text{(Борель-Лаплас уровня } k).$$

1.6. Борель и Стильтьес

В 1886 году в [Sti1] Стильтьес изучает суммирование ряда Эйлера при отрицательных значениях переменной. Это куда сложнее, чем в случае положительных переменных, так что теперь речь идет о суммировании расходящегося ряда, все члены которого положительны. Стильтьес предлагает следующий результат:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{2!}{a^3}+\frac{3!}{a^4}+\ldots=0,0455055614585\ldots,$$

где $e^a=10^{10}$ (то есть $a\simeq 23,025851$), и показывает, что качество аппроксимации экспоненциально порядка $e^{-a}\sqrt{2\pi/a}$, то есть 10^{-10}.

Достоинство метода Стильтьеса в том, что он наделяет ряд из действительных членов действительной суммой. Для метода суммирования Бореля это не так: для него отрицательное направление действительной оси сингулярно, и там есть два разных оператора суммирования ${S^+}_{\mathbb{R}-}$ и ${S^-}_{\mathbb{R}-}$. Можно проверить, что сумма Стильтьеса — не что иное, как среднее арифметическое двух сумм Бореля. Суммы Бореля отличаются от суммы Стильтьеса на мнимое число порядка $10^{-10}i$.

Мы видели, что суммы Бореля приводят к инъективным гомоморфизмам дифференциальных алгебр и поэтому превосходно согласуются с вычислениями с помощью расходящихся рядов. То же самое можно показать для суммы Стильтьеса (Ж.Экалль недавно замечательно обобщил соответствующую идею под названием *усредненное суммирование Бореля–Лапласа* (см. также [Di], гл. 1, E., стр. 8[11] и [MR3], стр. 358).

Этот результат тем более удивителен, что он не очевиден с первого взгляда. Действительно, рассмотрим, что происходит при разложении функции $\sqrt{1+x}$ в сходящийся ряд в начале координат:

$$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\ldots.$$

Если мы хотим суммировать этот ряд при $x=-2$, то есть

$$1-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{5}{8}-\ldots,$$

то одним из естественных способов было бы использование аналитического продолжения, избегая сингулярности при $x=-1$. Но тогда получатся *два*

[11] Половина разрывности в форме возникает, когда мы достигаем луча Стокса, а половина — когда покидаем его с другой стороны.

естественных решения, соответствующие двум ветвям функции $\sqrt{1+x}$; получаем $\pm i$. Ясно, что здесь нет естественного действительного решения. (Если бы $f(x)$ была естественной действительной суммой для $x < -1$, мы бы получили $f(x)^2 = 1 + x < 0$, что невозможно.)

В первом случае две суммы Бореля также соответствуют в некотором смысле (к которому мы вернемся в разделе 3.5) двум ветвям одной функции (эта идея появляется уже у Стокса: *аналогично смене знака в радикале* [Sto2]), но смена ветви (явление Стокса) — в этом случае — происходит в параметрической группе. Действительно, автоморфизм дифференциальной алгебры, соответствующий явлению Стокса, — это экспонента производной, которая коммутирует с производной алгебры: посторонняя точечная производная Ж. Экалля. Подобная ситуация уже не имеет места для обычной (алгебраической) смены ветви во втором случае (раздел 3.5).

1.7. Пуанкаре и асимптотическая теория

Классическая асимптотическая теория создана Пуанкаре. Последний разработал ее с намерением применить к аналитическим дифференциальным уравнениям: основным его мотивом было придать смысл формальному решению такого дифференциального уравнения, записанному в виде расходящегося ряда, то есть «воплотить» *формальное решение* в настоящее. Следует заметить, что принадлежащее Пуанкаре определение, которое мы сейчас приведем, не имеет ничего общего с его собственными замечаниями о свойствах изначально сходящихся, но затем расходящихся асимптотических рядов (то, что он называет сходимостью в смысле астрономов), как было бы естественно ожидать (и что привело к суммированию до наименьшего члена в разделе 1.3). Сегодня известно, что в действительности это общее свойство формальных решений аналитических дифференциальных уравнений.

Определение. Пусть V — открытый сектор с вершиной 0 на комплексной плоскости (или на римановой поверхности логарифма). Пусть f — голоморфная на V функция и $\widehat{f} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$. Говорят, что f *асимптотически приближается* рядом $\widehat{f}$ на V, если для любого компактного подсектора W из $V \cup \{0\}$ и любого целого $n \in \mathbb{N}$ существует действительное $M_{W,n} > 0$ такое, что

$$|x|^{-n}\left|f(x)-\sum_{p=0}^{n-1}a_p x^p\right|<M_{W,n},$$

для всех $x \in W$.

При выполнении этих условий мы обозначаем $f \sim \widehat{f}$ или $\widehat{f} = J(f)$.

Множество голоморфных на V функций, допускающих асимптотическое разложение в начале координат (снабженное операциями $+$, $\cdot$, $x^2 d/dx$), является дифференциальной $\mathbb{C}$-алгеброй, обозначаемой $A(V)$. Имеем точную последовательность дифференциальных алгебр

$$0 \to A^{<0}(V) \to A(V) \xrightarrow{J} \mathbb{C}[[x]] \to 0.$$

Сюръективность отображения J составляет теорему Бореля–Ритта (Borel–Ritt): любой формальный ряд $\widehat{f}$ может порождать[12] функцию f, голоморфную на V. К сожалению, это воплощение не единственно, функцию f можно выбирать (по модулю «пространства ошибок» $A^{<0}(V)$, состоящего из голоморфных на V функций, бесконечно плоских в начале координат). Иначе говоря, у нас нет естественного вложения $\widehat{f} \to f$ такого, что $J(f) = \widehat{f}$; нет теории суммирования в определенном выше смысле. Это один из наибольших недостатков теории Пуанкаре (*центральный недостаток классификации Пуанкаре* [*Di*] *— отсутствие единственности для функции, представленной асимптотическим разложением, составляет различие с суммами сходящихся рядов* [*O*]).

Применяя теорию Пуанкаре к аналитическим дифференциальным уравнениям, следует начать с формального ряда $\widehat{f}$ как решения аналитического уравнения

$$(x,\, y,\, \ldots,\, y^{(n)}) = 0,$$

где $G(x, Y_0, \ldots, Y_n)$ — аналитическая функция $n+2$ переменных и $G(x, \widehat{f}, \ldots, \widehat{f}^{(n)}) = 0$ и, воплотить $\widehat{f}$ в истинное решение f ($G(x, f, \ldots, f^{(n)}) = 0$). Тогда совокупность «возможных ошибок» (неуверенности относительно f) заметно уменьшается (для линейного уравнения она, очевидно, конечномерна, тогда как $A^{<0}(V)$ бесконечномерно), хотя в общем случае она, к сожалению, нетривиальна. За недостатком единственности, мы, во всяком случае, имеем весьма удовлетворительный результат существования. Это *фундаментальная теорема об асимптотических разложениях*.

[12] Incarner (франц.) — можно также перевести *породить, материализовать*. — *Прим. ред.*

Теорема. *Пусть* $G(x, Y, \ldots, Y_n)$ *— аналитическая функция* $n+2$ *переменных и ряд* $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ *— формальное решение дифференциального уравнения*

$$G(x, y, \ldots, y^n) = 0 \qquad (\text{то есть } G(x, \widehat{f}, \ldots, \widehat{f}^{(n)}) = 0). \tag{1}$$

Тогда существует действительное $k > 0$ *такое, что для любого открытого сектора* V *с вершиной в начале координат, с углом раствора* $< \pi/k$ *и достаточно малым радиусом существует функция* f*, являющаяся решением дифференциального уравнения* (1) *и имеющая* $\widehat{f}$ *своим асимптотическим разложением на* V.

В таком виде (то есть без каких бы то ни было ограничивающих гипотез) этот результат был получен достаточно недавно, он принадлежит Рамису и Сибуя (Ramis et Sibuya) [RS1]. Первые частные случаи, установленные Пуанкаре и [RS1], успешно улучшались многими авторами.

2. Асимптотические разложения и суммируемость

Сейчас мы вкратце обозначим, как можно преодолеть недостатки асимптотической теории Пуанкаре, чтобы перейти к «точной асимптотической теории». Этапы таковы:

- асимптотические разложения Жевре,
- k-суммируемость,
- мультисуммируемость[13].

2.1. Асимптотические разложения Жевре

Для начала сделаем несколько замечаний о явлениях, которые систематически встречаются при практическом использовании асимптотических разложений, но не приняты в расчет в теории Пуанкаре.

(a) Можно констатировать, что большая часть встречающихся формальных рядов $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ явно удовлетворяют условию вида

$$|a_n| < C(n!)^{\frac{1}{k}} A^n,$$

[13]Многочисленные направления современных исследований развиваются в том же духе: теории рекурсий и ускорения сходимости Экалля [E1], [E2], [E3], работы русской школы: Ильяшенко, английской школы: гиперасимптотики [BH].

где C, A, $k > 0$ — подходящие действительные числа. Для примера можно открыть одну из «библий», посвященных специальным функциям ([AS], [MOS], [Lu]), и подтвердить это наблюдение экспериментально.

(b) Можно констатировать, что на практике неопределенность, вносимая в искомую функцию f с известным асимптотическим разложением[14], — это не только голоморфная функция, бесконечно гладкая на некотором секторе, но, точнее, голоморфная функция с экспоненциальным убыванием некоторого порядка $k > 0$:

$$|f(x)| < Ce^{\frac{-a}{x^k}} \qquad (C,\, a > 0 \text{ — подходящие действительные числа}).$$

(c) При изменении x номер наименьшего члена в общем случае близок к номеру $N =$ целой части $\dfrac{b}{x^k}$ при подходящем выборе b, $k > 0$ (для ряда Эйлера, например, $k = 1$ и $b = 1$). Это приводит нас к определению *квазисуммирования до наименьшего члена*: в качестве суммы ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ берется число $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n$, где N — целая часть $\dfrac{b}{x^k}$, параметры b и k выбраны заранее. На практике можно наблюдать, что при правильном выборе констант этот метод очень эффективен численно.

Существует простое видоизменение асимптотической теории Пуанкаре, превосходно объясняющее эти три замечания: это асимптотическая теория Жевре[15].

Определение. Пусть $k > 0$ — действительное число. Пусть V — открытый сектор с вершиной 0 на комплексной плоскости (или на римановой поверхности логарифма). Пусть f — голоморфная на V функция, а $\widehat{f} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$. Говорят, что f *асимптотически приближается по Жевре порядка k рядом $\widehat{f}$ на V*, если для любого компактного подсектора W из $V \cup \{0\}$ и любого целого $n \in \mathbb{N}$ существуют действительные

[14]Неопределенность, которая может возникнуть из-за погрешностей или из-за того, что есть несколько «естественных» решений задачи (двойственность).

[15]Можно показать эквивалентность трех свойств (a), (b) и (c), если сформулировать их подходящим образом. Я отметил эквивалентность $(a) \Leftrightarrow (b)$ в 1978 году; на эквивалентность $(a) \Leftrightarrow (c)$ мне несколько позже указал Б. Мальгранж.

$C_W > 0$ и $A_W > 0$ такие, что

$$|x|^{-n}\left|f(x)-\sum_{p=0}^{n-1}a_px^p\right| < C(n!)^{\frac{1}{k}}A^n,$$

для всех $x \in W$.

Множество голоморфных на V функций, допускающих асимптотическое разложение по Жевре порядка $s = \frac{1}{k} > 0$ в начале координат (снабженное операциями $+$, $\cdot$, x^2d/dx), является дифференциальной $\mathbb{C}$-алгеброй, обозначаемой $A_{\frac{1}{k}}(V)$.

Если V — открытый сектор с размыканием $< \pi/k$ (*малый сектор*), то получаем точную последовательность дифференциальных алгебр

$$0 \to A^{<-k}(V) \to A_{\frac{1}{k}}(V) \xrightarrow{J} \mathbb{C}[[x]]_{\frac{1}{k}} \to 0.$$

Сюръективность отображения J следует из теоремы Бореля–Ритта–Жевре (которую можно доказать с помощью «неполного преобразования Лапласа»).

Аналогом фундаментальной теоремы об асимптотических разложениях является *фундаментальная теорема об асимптотических разложениях по Жевре* [RS1].

Теорема. *Пусть $G(x, Y, \ldots, Y_n)$ — аналитическая функция $n+2$ переменных, а $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{\frac{1}{k}}$ — формальный ряд Жевре порядка $\frac{1}{k}$, являющийся решением дифференциального уравнения*

$$G(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (\textit{то есть } G(x, \widehat{f}, \ldots, \widehat{f}^{(n)}) = 0). \tag{1}$$

Тогда существует действительное $k' > 0$ такое, что для любого открытого сектора V с вершиной в начале координат, размыканием $< \inf(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k'})$, достаточно малого радиуса существует функция f — решение дифференциального уравнения (1), асимптотически приближаемая рядом $\widehat{f}$ на V в смысле Жевре порядка $\frac{1}{k}$.

Вся польза этой теоремы обнаруживается, если принять во внимание следующий результат.

Теорема (Мелле (Maillet) [M]). *Пусть $G(x, Y, \ldots, Y_n)$ — аналитическая функция $n+2$ переменных, а $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ — формальный ряд, являющийся решением дифференциального уравнения*

$$G(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (\textit{то есть } G(x, \widehat{f}, \ldots, \widehat{f}^{(n)}) = 0). \tag{1}$$

Тогда существует действительное $k > 0$ такое, что формальный ряд $\widehat{f}$ имеет тип Жевре порядка $1/k$.

Мелле доказал эту теорему с помощью непосредственных оценок. В общем случае результат далек от оптимального (действительное число k не наименьшее из возможных). Мы вернемся к этому вопросу в разделе 3.1.

Для подготовки к дальнейшему изложению (и чтобы объяснить взаимосвязь вышеприведенных замечаний (a) и (b)) я собираюсь ввести «более геометрическую» концепцию ряда Жевре, используя понятие *k-точной квазифункции.* (На самом деле в литературе, на которую я ссылаюсь, в некоторой степени используются когомологии пучков, но сейчас мне нужно передать основные идеи, оставаясь на элементарном техническом уровне.)

Рассмотрим открытый сектор V на $\mathbb{C}$ (возможно, круг D^* без одной точки) или на римановой поверхности логарифма. Используем покрытия $\{V_i\}_{i\in I}$ на V. Предположим, что все эти покрытия конечны, радиус каждого V_i совпадает с радиусом V, все тройные пересечения пусты. Предположим также, что $I = [1, m]$ и занумеруем V_i по часовой стрелке. Обозначим $V_{i,i+1} = V_i \cap V_{i+1}$ (если $V = D^*$, то индексы считаются по модулю $m+1$). Будем рассматривать *голоморфные 0-коцепи*, совпадающие с последовательностями $\{f_i\}$, где f_i голоморфна на V_i и соответствующие 1-*кограницы* (1-коцепи), то есть последовательности $\{h_i\}$, где $h_i = f_{i+1} - f_i$.

Определение. Пусть $k > 0$. Тогда *k-точная квазифункция* на секторе V задается некоторой голоморфной 0-коцепью $\{f_i\}$, ассоциированной с покрытием $\{V_i\}_{i\in I}$, причем $h_i = f_{i+1} - f_i$ убывают на $V_{i,i+1}$ экспоненциально порядка k. Два таких набора $(\{f_i\}; \{V_i\}_{i\in I})$ и $(\{g_j\}; \{W_j\}_{j\in J})$ отождествляются, если для каждого непустого пересечения $V_i \cap W_j$ разность $(f_i - g_j)$ убывает на этом пересечении экспоненциально порядка k.

Иначе говоря, понятие k-точной квазифункции — это формализация понятия голоморфной функции, «известной с экспоненциальной точностью почти до порядка k».

Произвольная k-точная квазифункция называется *ограниченной*, если все f_i ограничены.

Покрывая проколотый диск D^* секторами с размыканием $< \pi/k$ и используя теорему Бореля–Ритта–Жевре, можно каждому ряду Жевре $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{1/k}$ сопоставить единственную (по модулю проведенного отождествления) k-точную квазифункцию, то есть его квазисумму (аналогичную функции, равной сумме сходящегося ряда). Если $\{f_i\}$ представляют квазисумму ряда $\widehat{f}$, тогда $f_i \sim \widehat{f}$ на V_i в смысле Жевре порядка $1/k$. Также как голоморфная функция, ограниченная на проколотом круге D^*, является суммой некоторого сходящегося ряда (принцип несуществующих особенностей Римана), так и k-точная квазифункция, ограниченная на проколотом круге D^*, является квазисуммой некоторого ряда Жевре порядка $1/k$.

Это существенный результат, он доказывается как обычно, с помощью интеграла Коши ([Ra1], [Si1], [Si2], [Si3, th. 3.2]). Благодаря ему у нас есть «когомологический» метод доказательства того, что некоторый ряд имеет тип Жевре: это проверяется до «бесконечно гладкой поправки», чье экспоненциальное убывание надо изучить. Как оказалось, этот метод мощнее обычных (то есть прямой оценки коэффициентов, теорем о неявных функциях и т. д.). Среди прочего, он допускает линеаризацию задачи (смотри часть 3).

Основания асимптотической теории Жевре и теории k-суммируемости (раздел 2.2), найденные и развитые мной начиная с 1978 года, в действительности датируются началом этого века и принадлежат английскому математику Г. Ватсону [Wat2], [Wat3]. По-видимому, работы Ватсона не имели большого успеха, и его идеи были забыты[16]. Еще сегодня можно найти отголоски суровой критики, которой должен был подвергаться Ватсон, в двух наиболее известных (и лучших) книгах по асимптотической теории [Di], [O]: Дингл, упоминая об асимптотических разложениях Жевре и о введенной Ватсоном ассоциированной суммируемости, писал:

Ценой заметного усложнения основная неточность определения Пуанкаре может быть устранена... Было сказано достаточно для демонстрации всей сложности природы Этого (получившегося) определения... Доказательство среди этих рядов полных асимптотических разложений требует все более сильных и усиливающихся знаний (предположений)...,

[16]Однако следует отметить, что эти работы вызвали появление теории классов квазианалитических функций Данжуа – Карлемана [Ca] (также [Ne]), вновь возникшую в последних исследованиях Ж. Экалля о суммируемости расходящихся рядов: связанные функции.

чтобы реализовать обманчиво естественную идею, как это оказалось вначале, построить подходящий базис определений. Исключением являются простейшие асимптотические разложения, вычисляемые элементарными методами...

Еще суровее — Олвер [O, стр. 543]:

К сожалению, удовлетворительное определение полной пригодности недостижимо. Другой недостаток теории Ватсона — необходимость некоторых свойств у остаточного члена, которые, по-видимому, достижимы, если только известна реалистичная граница остаточного члена. Так что эта теория, в основном, бесполезна.

Мы надеемся, что следующая часть этих заметок убедит читателя в совершенной неточности этих суждений. (Очень удивляет ошибочная оценка у Дингла, который превосходно понимал важность экспоненциально малых ошибок в асимптотической теории и был так близок к правильной точке зрения!)

2.2. k-суммируемость

Пусть $k > 0$. Если V — открытый сектор с углом раствора $< \pi/k$ (малый сектор), то, как мы видели, получается точная последовательность дифференциальных алгебр:

$$0 \to A^{<-k}(V) \to A_{1/k}(V) \xrightarrow{J} \mathbb{C}[[x]]_{1/k} \to 0.$$

Совсем иная ситуация возникает, когда V — открытый сектор с размыканием $> \pi/k$ (*большой сектор*). Тогда получается следующая точная последовательность дифференциальных алгебр:

$$0 \to A_{1/k}(V) \xrightarrow{J} \mathbb{C}[[x]]_{1/k} \to 0.$$

В этом случае отображение J уже не сюръективно. Напротив, оно инъективно, как показывает следующий результат.

Теорема (Ватсон [Wat2]). *Пусть $k > 0$ действительно, а V — открытый сектор с вершиной в начале координат и раствором $> \pi/k$. Пусть f — голоморфная на V функция, убывающая на V экспоненциально порядка k. Тогда f тождественно равна нулю.*

Эта теорема — следствие теоремы Фрагмена–Линделефа (один их вариантов принципа максимума). В случае большого сектора мы теряем существование, но получаем *единственность* суммы формального ряда Жевре. Это приводит к следующему понятию суммируемости.

Определение. Пусть $k > 0$ действительно, а d — фиксированное направление. Формальный ряд $\widehat{f}$ называется *k-суммируемым по направлению d*, если существует функция f, голоморфная на некотором секторе V с биссектрисой d и размыканием $> \pi/k$, асимптотически приближаемая на V рядом $\widehat{f}$ в смысле Жевре порядка $1/k$.

Согласно теореме Ватсона при этих условиях функция f единственна (вблизи сектора определения V). Мы будем говорить, что f — это *сумма ряда $\widehat{f}$ по направлению d* в смысле k-суммирования. Будем обозначать $f = S_{k;d}\widehat{f}$, а через $\mathbb{C}\{x\}_{\frac{1}{k};d}$ обозначим совокупность k-суммируемых по направлению d рядов. Сразу проверяем, что $\mathbb{C}\{x\}_{\frac{1}{k};d}$ — дифференциальная подалгебра $\mathbb{C}[[x]]_{\frac{1}{k}}$, а вложение

$$S_{k;d}\colon \mathbb{C}\{x\}_{\frac{1}{k};d} \to A_d \ -$$

инъективный гомоморфизм дифференциальных алгебр. (Здесь A_d обозначает алгебру ростков голоморфных функций на открытых секторах с биссектрисой d, произвольным размыканием и радиусом.)

Это определение k-суммируемости приемлемо (и очень полезно, например, для *проверки* k-суммируемости ряда, являющегося формальным решением функционального аналитического уравнения), но оно не позволяет явно *вычислять* сумму. Для этого используется эквивалентное определение (эквивалентность легко доказать).

Определение. Пусть $k > 0$ действительно, а d — фиксированое направление. Формальный ряд $\widehat{f}$ называется *k-суммируемым по направлению d*, если его формальное преобразование Бореля $\widehat{\phi} = \widehat{\mathcal{B}}_k f$ уровня k сходится и его (обычная) сумма аналитически продолжается голоморфной функцией (уже обозначенной) ϕ и возрастает экспоненциально порядка более чем k

в открытом секторе с биссектрисой d. При этих условиях говорят, что

$$f(x) = k \int\limits_d \phi(\xi) e^{-\frac{\xi^k}{x^k}} \xi^{k-1} d\xi = \mathcal{L}_{k;d} \widehat{f}(x) -$$

это *сумма ряда* $\widehat{f}$ *по направлению* d в смысле k-суммируемости.

Оператор $\widehat{\mathcal{B}}_k \colon \mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}[[x]]$ был определен в разделе 1.5. Отметим, что оператор Лапласа $\mathcal{L}_{k;d}$ уровня k, введенный этим определением, задан на большей области, чем одноименный оператор, введенный в 1.5. Имеем

$$S_{k;d} = \mathcal{L}_{k;d \cdot d} S \widehat{\mathcal{B}}_k.$$

Для $k = 1$ получаем метод суммирования Бореля (в действительности, изначальный метод Бореля имеет несколько более общий вид).

Также k-суммируемый ряд можно суммировать по направлению d, используя один из абелевых методов, суммирование Харди–Жюрка (без явного использования параметра k).

Теорема (Жюрка [J]). *Пусть $k > 0$, а d — исходящее из начала координат направление. Пусть $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[x]] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ — формальный ряд, k-суммируемый по направлению d. Его сумма f по направлению d аналитически продолжается вдоль максимального открытого интервала γ_d, отложенного вдоль d, функцией, которая тоже обозначается f. Если x_0 — точка из γ_d, то предел*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n e^{-tn \log n \log(\log n)} \right)$$

существует и равен $f(x_0)$.

Легко видеть, что наша формулировка точнее, чем в [J]. Этот результат можно доказать — используя результаты автора этих заметок, — обратившись к случаю, когда коэффициенты a_n k-суммируемого ряда $\sum a_n x^n$ являются моментами некоторой функции ϕ, определенной на $[0, a] \subset \mathbb{R}^+$ и убывающей в начале координат экспоненциально[17] порядка k:

[17]Если $k = 1$, а функция ϕ принимает положительные действительные значения, сумму Бореля можно вычислить, преобразовав степенной ряд $\sum a_n x^x$ в непрерывную сходящуюся дробь (Лагерр, Стильтьес, Борель [Bo1], гл. 2, Падэ).

$$a_n = \int\limits_0^a \phi(t)t^{-(n+1)}dt.$$

Готовясь к изучению мультисуммируемости, мы переформулируем понятие k-суммируемого ряда немного более «геометрическим» способом, с помощью понятия квазифункции.

Определение. Пусть $k > \frac{1}{2}$ и $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{1/k}$. *Ассоциированная с* $\widehat{f}$ *k-последовательность по направлению* d — это последовательность (f_1, f_2), где f_2 — квазифункция, k-точная квазисумма ряда $\widehat{f}$, а f_1 — функция, голоморфная на секторе V на $\mathbb{C}$ с биссектрисой d и размыканием $> \pi/k$; функция f_1 как k-точная квазифункция равна ограничению f_2 на V.

По теореме Ватсона, такая последовательность единственна, если она существует. Сразу проверяем, что такая k-последовательность существует тогда и только тогда, когда ряд $\widehat{f}$ k-суммируем по направлению d; в этом случае f_1 равна сумме ряда $\widehat{f}$ по направлению d в смысле k-суммируемости.

2.3. Мультисуммируемость

После того как Эмиль Борель открыл борелевскую суммируемость, а Леруа [Le] и Неванлинна [Ne] вскоре обобщили ее в понятие k-суммируемости, многие математики пытались доказать, что формальные ряды — решения дифференциальных алгебраических уравнений — всегда k-суммируемы. Уже в 1903 году эту задачу изучал Мелле [M]. К сожалению, как я показал в 1979 году в [Ra2], это неверно, причем по причине, в сущности, достаточно очевидной, так что удивительно, почему подобное замечание не было сделано раньше.

Интуитивно понятно, что когда $k \neq k'$, методы k-суммирования и k'-суммирования «достаточно далеки друг от друга» и почти несравнимы: если $k < k'$, то асимптотические оценки, нужные для k'-суммируемости, *будут строже*, зато необходимое размыкание сектора (больше, чем π/k') — меньше (требования к размыканию сектора *менее строгие*). Интуиция подтверждается следующей «тауберовой» теоремой.

Теорема [Ra7]. *Пусть k и k' — два действительных числа, причем $k' > k > 0$. Тогда*

$$\mathbf{C}[[x]]_{\frac{1}{k}} \cap \mathbf{C}[[x]]_{\frac{1}{k'}} = \mathbf{C}\{x\}.$$

Теперь, желая построить искомый контрпример, мы приходим к рассмотрению суммы $\widehat{f}$ формального k_1-суммируемого решения $\widehat{f}_1$ линейного алгебраического дифференциального оператора D_1 и формального k_2-суммируемого решения $\widehat{f}_2$ линейного алгебраического дифференциального оператора D_2. Эта сумма будет решением линейного алгебраического дифференциального оператора D.

Наиболее простой пример получается, если взять в качестве $\widehat{f}_1$ ряд Эйлера, а в качестве $\widehat{f}_2$ — ряд Эйлера, в котором x заменен на x^2. Тогда $\widehat{f}_1$ будет 1-суммируемый, $\widehat{f}_2$ — 2-суммируемый ряд, но сумма

$$\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2, \qquad \widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! x^{2n+2}$$

не будет k-суммируема *ни для одного* действительного $k > 0$. Более того, сумма $\widehat{f}$ — решение следующих линейных алгебраических дифференциальных уравнений [RS1, 3.75, 7.6]:

- $Dy = 0$;

$$D = \frac{d^5}{dx^5}\Big\{x^5(2-x)\frac{d}{dx^2} - x^2(2x^3 - 5x^2 - 4)\frac{d}{dx} + 2(x^2 - x + 2)\Big\};$$

- $x^5(2-x)y'' - x^2(2x^3 - 5x^2 - 4)y' + 2(x^2 - x + 2)y = -3x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 4x$.

Если нам нужен метод, пригодный для суммирования формальных решений дифференциальных алгебраических уравнений (даже только линейных), то, как можно видеть, кажется разумным искать метод, позволяющий *суммировать* конечные суммы k-суммируемых рядов (по одному и тому же фиксированному направлению d) при *разных* k. Очевидно, можно подумать, что для $\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$ сумму ряда $\widehat{f}$ можно определить как сумму сумм рядов $\widehat{f}_1$ и $\widehat{f}_2$. Но тут же возникает затруднение: надо доказать, что полученная таким образом сумма $\widehat{f}$ не зависит от разложения (то есть от выбора $\widehat{f}_1$ и $\widehat{f}_2$). Более того, мы желаем работать с алгеброй, поэтому нам надо изучить, как раскладывается в сумму произведение. Наконец, если мы хотим применить все это к дифференциальным уравнениям (линейным или нет), то нам нужно будет выяснить, как раскладывается в сумму k-суммируемых рядов (по одному и тому же направлению) формальный ряд, являющийся решением такого уравнения.

По прошествии многих лет — и благодаря усилиям многих математиков — на все эти вопросы были даны удовлетворительные ответы. Проще всего определить мультисуммируемость, используя следующий результат.

Теорема. *Пусть d — исходящее из начала координат направление. Сумма*

$$\sum_{k>\frac{1}{2}} \mathbf{C}\{x\}_{\frac{1}{k};d}$$

комплексных векторных подпространств из $\mathbf{C}[[x]]$ является дифференциальной подалгеброй алгебры $(\mathbf{C}[[x]],\ x^2 d/dx)$. Более того, существует единственный инъективный гомоморфизм дифференциальных алгебр

$$S_d\colon \sum_{k>\frac{1}{2}} \mathbf{C}\{x\}_{\frac{1}{k};d} \to A_d$$

такой, что ограничение S_d на каждое пространство $\mathbf{C}\{x\}_{\frac{1}{k};d}$ (при $k > \frac{1}{2}$) совпадает с оператором k-суммирования по направлению d:

$$S_{k;d}\colon \mathbf{C}\{x\}_{\frac{1}{k};d} \to A_d.$$

Заменяя в формулировке теоремы переменную x на одну из ветвей переменной $x^{\frac{1}{m}}$ (где $m \in \mathbb{N}^*$), получаем инъективный гомоморфизм дифференциальных алгебр (тоже обозначаемый $S_{k;d}$):

$$S_{k;d}\colon \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} \sum_{k>\frac{1}{2}} \mathbb{C}\{x^{\frac{1}{m}}\}_{\frac{1}{k};d} \to A_d.$$

Обозначим

$$\mathbb{C}\{x\}_{\cdot;d} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} \sum_{k>\frac{1}{2}} \mathbb{C}\{x^{\frac{1}{m}}\}_{\frac{1}{k};d} \cap \mathbb{C}[[x]].$$

Итак, $\mathbf{C}\{x\}_{\cdot;d}$ — дифференциальная подалгебра алгебры

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} \sum_{k>\frac{1}{2}} \mathbb{C}\{x^{\frac{1}{m}}\}_{\frac{1}{k};d},$$

которая содержит алгебры $\mathbb{C}\{x\}_{\frac{1}{k};d}$ для всех $k > 0$. Действительно, имеем равенство

$$\mathbb{C}\{x^{\frac{1}{m}}\}_{\frac{1}{k};d} \cap \mathbb{C}[[x]] = \mathbf{C}\{x\}_{\frac{1}{mk};d}.$$

Получаем инъективный гомоморфизм дифференциальных алгебр

$$S_{k;d}\colon \mathbf{C}\{x\}_{\cdot;d} \to A_d,$$

ограничение которого на каждую из алгебр $\mathbf{C}\{x\}_{\frac{1}{k};d}$ при $k > 0$ совпадает с оператором k-суммирования по направлению d.

Формальный ряд $\widehat{f}$, принадлежащий $\mathbf{C}\{x\}_{\cdot;d}$, называется мультисуммируемым по направлению d, если для некоторого подходящего $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$f \in \sum_{i=1}^{r} \mathbb{C}\{x^{\frac{1}{m}}\}_{\frac{m}{k_i};d}.$$

Определение. Пусть $k_1, \ldots, k_r$ — действительные числа такие, что $k_1 > k_2 > \ldots > k_r > 0$, а d — исходящее из начала координат направление. Если $\widehat{f}$ принадлежит

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{C}\{x^{\frac{1}{m}}\}_{\frac{m}{k_i};d},$$

то говорят, что ряд $\widehat{f}$ $(k_1, \ldots, k_r)$-суммируемый по направлению d, и обозначают $\widehat{f} \in \mathbf{C}\{x\}_{\frac{1}{k_1},\ldots,\frac{1}{k_r};d}$.

Существуют два достаточно различных доказательства только что сформулированной теоремы. Первое использует теорию ускорения Ж. Экалля [E4] и обобщает метод приближения интегральной формулой и аналитическое продолжение (Бореля–Лапласа) для k-суммируемости. Это доказательство подробно изложено в [MR3]. Второе, более геометрическое, принадлежит Б. Мальгранжу и Ж.–П. Рамису [MaR], оно существенно использует понятие экспоненциально малой поправки. Грубо говоря, метод таков.

Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_r$ — действительные числа такие, что $k_1 > k_2 > \ldots > k_r > 0$, а d — исходящее из начала координат направление. Пусть

$\widehat{f} \in \mathbf{C}[[x]]_{\frac{1}{k_r}}$ и $V_1 \subset \dots \subset V_r$ — вложенные открытые секторы с одинаковым радиусом и биссектрисой. Предположим, что угол раствора $V_i > \pi/k_i$.

Ассоциированная с f $(k_1, \dots, k_r)$*-последовательность* задается последовательностью $(f_1, \dots, f_r, f_{r+1})$, где f_1 — функция, голоморфная на секторе V_1, f_{r+1} — k_r-точная квазифункция, определенная рядом f, а $f_2, \dots, f_r$ — соответственно $k_1, \dots, k_{r-1}$-точные квазифункции, определенные на секторах $V_2, \dots, V_r$ соответственно; ограничение f_{i+1} на V_i совпадает с k_i-точной квазифункцией, ассоциированной с k_{i-1}-точной квазифункцией f_i для $i = 1, \dots, r$ (по определению считаем $k_0 = +\infty$).

Относительная квазианалитическая теорема, которую мы сформулируем дальше, позволяет увидеть, что если ассоциированная с $\widehat{f}$ $(k_1, \dots, k_r)$-последовательность существует, то она *единственна*. При этих условиях говорят, что $\widehat{f}$ *мультисуммируем по направлению* d, а f_1 — *его сумма по направлению* d. Тогда легко проверить, что $\widehat{f} \mapsto f_1$ — инъективный гомоморфизм дифференциальных алгебр (f_1 допускает $\widehat{f}$ в качестве асимптотического разложения в начале координат). После некоторых усилий получаем описанные выше свойства разложений в сумму k-суммируемых рядов.

Теорема (Б. Мальгранж [Ma1]). *Пусть* $k' > k > 0$. *Пусть* V — *открытый сектор на комплексной плоскости* (*или на римановой поверхности логарифма*) *с вершиной в начале координат и раствором* $> \pi/k$. *Пусть* f — k*-точная квазифункция на* V, *убывающая на* V *экспоненциально порядка* k' (*то есть* f *представима некоторой 0-коцепью* $\{f_i\}$, *где* f_i *убывают на* V_i *экспоненциально порядка* k, *а* $f_{i,i+1}$ *убывает на* $V_{i,i+1}$ *экспоненциально порядка* k). *Тогда* f — *нулевая* k*-точная квазифункция на* V (*то есть все* f_i *убывают на* V_i *экспоненциально порядка* k).

Эта теорема обобщает сформулированную в 2.2 теорему Ватсона с аналогичной формулировкой, в которой квазифункции заменены на функции. Относительная квазианалитическая теорема Мальгранжа эквивалентна «тауберовой» теореме Ж. Мартине и Ж.-П. Рамиса [[MR2], chap. 2, prop. 4.3].

Теорема. *Пусть* $0 < k' < k$, $k = \dfrac{kk'}{(k-k')}$, *а* d — *исходящее из начала координат направление. Если формальный ряд* $\widehat{f} \in \mathbf{C}[[x]]_{1/k}$ k'*-суммируем по направлению* d, *то он* k*-суммируем по любому направлению сектора с биссектрисой* d *и раствором* π/k.

Очень близкое к этой теореме утверждение получили еще Г. Х. Харди [H3] (при $\frac{k}{k'} = 2$) и его ученик Гуд (Good) [Goo].

По поводу природы тауберовых теорем Г. Х. Харди писал в [H1, 6.1, p. 121]:

Существует другой, менее очевидный предел для эффективности этих методов и всего, что было доказано полезного. Ни одним методом нельзя суммировать ряд, расходящийся слишком быстро; но также нельзя суммировать расходящийся ряд со слишком медленной расходимостью[18]. *Теоремы, воплощающие этот принцип, принадлежат... к так называемому тауберову классу. В них утверждается, что если ряд суммируем (P) и удовлетворяет еще какому-то условию K_P (которое меняется в зависимости от P, но, во всяком случае, влечет за собой некоторую замедленность возможной расходимости), то он сходится.*

В некотором смысле этот принцип был обобщен позже, согласно идеям Харди и Литлвуда. Процитируем Гуда [Goo, p. 145], который сравнивает два метода суммируемости f и g:

Итак, очень часто мы получаем принцип суммируемости Харди–Литлвуда: если метод f имеет более широкую область приложения, чем g, и если g приложим, а f эффективен, тогда g эффективен.

Сформулированная выше тауберова теорема хорошо иллюстрирует этот последний принцип.

Недостаток приближения с помощью только что очерченного нами метода мультисуммируемости состоит в том, что у нас нет явного удобного способа для вычисления суммы. Можно получить такой способ с помощью ускорения, которое мы здесь описывать не будем (можно обратиться к вводной статье в [LR2]). Еще можно использовать метод итераций преобразований Лапласа (разных уровней), принадлежащий Бальсеру (Balser) [Ba2]. Он действует так.

Пусть $k_1 > \ldots > k_r > 0$. Определим строго положительные действительные числа $k_1, \ldots, k_r$ условиями $k_1^{-1} = k_1^{-1}$ и $k_i^{-1} = k_i^{-1} - k_{i-1}^{-1}$ при $i = 2, \ldots, r$ так, что

$$\frac{1}{k_i} = \frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_i} \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, r.$$

Обозначим через $._d$ аналитическое продолжение по направлению d.

[18]Выделено Харди.

Теорема. *Пусть d — исходящее из начала координат направление, $k_1 > \ldots > k_r > 0$ и $k_1, \ldots, k_r$ определены выше. Для $\widehat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ следующие условия эквивалентны:*

(i) ряд $\widehat{f}$ ($k_1, \ldots, k_r$-суммируем по направлению d);

(ii) ряд $\widehat{\mathcal{B}}_{k_r} \ldots \widehat{\mathcal{B}}_{k_1} \widehat{f}$ сходится, и для всех $i = r, \ldots, 2$ функция

$$_{\cdot d}\mathcal{L}_{k_i \cdot d} \ldots \mathcal{L}_{k_r \cdot d} S \widehat{\mathcal{B}}_{k_r} \ldots \widehat{\mathcal{B}}_{k_1} \widehat{f}$$

голоморфна и возрастает экспоненциально порядка k_{i-1} на подходящем секторе с биссектрисой d.

При выполнении этих условий функция $\mathcal{L}_{k_i \cdot d} \ldots \mathcal{L}_{k_r \cdot d} S \widehat{\mathcal{B}}_{k_r} \ldots \widehat{\mathcal{B}}_{k_1} \widehat{f}$ существует и равна сумме (в смысле мультисуммируемости) ряда $\widehat{f}$ по направлению d.

Этот метод допускает численные приложения [Th2]. Другой явный метод суммирования мультисуммируемого ряда — элегантный, но менее подходящий для численных приложений — задается следующим результатом Жюрка [J][19].

Теорема. *Пусть d — исходящее из начала координат направление и $\widehat{f} \in \mathbf{C}[[x]] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ — формальный ряд, мультисуммируемый по направлению d. Его сумма f по направлению d аналитически продолжается вдоль максимального открытого интервала γ_d, отложенного вдоль d, функцией, тоже обозначаемой f.*

Если x_0 — точка на γ_d, то предел

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \Big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n e^{-tn \log n \log(\log n)} \Big)$$

существует и равен $f(x_0)$.

Иначе говоря, мультисуммируемость включает суммируемость абелевым методом Харди–Жюрка.

Заметим, что для разработки явных методов суммирования, основанных на мультисуммируемости (суммируемость ускорением или итерациями преобразований Лапласа), необходимо знать *критические уровни*

[19] В действительности доказанный Жюрка результат менее точен. Нужно обобщить его доказательство, используя [MaR].

$k_1, \ldots, k_r$. Напротив, для суммирования абелевым методом Харди–Жюрка их знать не надо: последний метод «мощнее» (он суммирует больше расходящихся рядов). Мы встретились с ситуацией, аналогичной суммированию сходящегося ряда в его звезде Миттаг–Леффлера: когда абелев метод Линделефа позволяет находить сумму во всей звезде, метод Бореля–Лапласа $(\widehat{\mathcal{B}}_k, \mathcal{L}_k)$ требует выбора параметра k в зависимости от точки звезды, в которой мы желаем найти сумму. За мощность метода надо платить численной неэффективностью.

Такова иллюстрация общего феномена, открытого Харди и Литлвудом: чем мощнее метод суммирования, тем он чувствительнее (тоньше). Вновь процитируем Харди [H3], p. 153:

Мы с Литлвудом часто настаивали на общем принципе, который трудно сформулировать точно, но который в общих чертах можно обозначить так: чувствительность метода суммирования стремится быть обратно пропорциональной его мощности.

3. Расходящиеся ряды и динамические системы

3.1. Формальные решения дифференциальных уравнений

Здесь я не буду говорить особо о линейном случае. По поводу численных аспектов можно обратиться к обзору М. Лодэ – Ришо (Loday – Richaud) [LR1] и к [Th1] и [Th2].

Сейчас я вернусь к теореме Мелле, сформулированной в 2.1. Целью Мелле было просуммировать формальные ряды, являющиеся решениями алгебраических дифференциальных уравнений. Он думал, что здесь можно добиться успеха с помощью k-суммируемости; установленное им свойство Жевре было бы необходимым условием. Мы видели, что в действительности этот план сам по себе нерационален, и оказалось необходимым прибегнуть к мультисуммируемости. Сейчас мы увидим, что ее достаточно: любой формальный ряд, являющийся решением аналитического дифференциального уравнения (линейного или нет), мультисуммируем по всем направлениям, кроме разве что некоторого конечного числа.

Для начала улучшим условия Жевре в теореме Мелле. Простейший случай — линейный, с которого мы и начнем.

Определение. Будем говорить, что формальный ряд $\widehat{f}$ *имеет тип Жев-*

ре точного порядка $1/k$, если он имеет порядок $1/k$, и не существует действительного $k' > k$ такого, чтобы ряд имел порядок $1/k$.

С каждым ростком линейного аналитического дифференциального уравнения
$$Dy = a_n y^{(n)} + \ldots + a_0 y = 0,$$
в начале координат свяжем многоугольник Ньютона $N(D)$ [Ra1]. Имеет место следующий результат.

Теорема. *Пусть* $Dy = 0$ *— росток аналитического дифференциального уравнения в начале координат комплексной плоскости. Если* $\widehat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ *— формальное решение этого уравнения, то* $\widehat{f}$ *либо сходится, либо имеет тип Жевре точного порядка* $1/k$, *где* k *— одна из строго положительных сторон многоугольника Ньютона* $N(D)$ *для* D.

Этот результат получен О. Перроном в случае линейного алгебраического дифференциального уравнения и мной — в аналитическом случае [Pe], [Ra1, 5]. (В линейном аналитическом случае оценки Мелле были улучшены в работе Джингольда [Gi].)

Перейдем к нелинейному случаю. Рассмотрим аналитическое дифференциальное уравнение
$$G(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$
Предположим, что это уравнение допускает формальное решение $\widehat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$. Мы можем сопоставить паре $(G, \widehat{f})$ многоугольник Ньютона $N(G, \widehat{f})$ (*многоугольник Ньютона функции* G *вдоль* $\widehat{f}$). Можно получить точные оценки в теореме Мелле.

Теорема. *Пусть* $G(x, Y_1, \ldots, Y_n)$ *— аналитическая функция* $n+2$ *переменных и* $\widehat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ *— формальный ряд, являющийся решением дифференциального уравнения*
$$G(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$
Тогда $\widehat{f}$ *сходится или имеет тип Жевре точного порядка* $1/k$, *где* k *— одна из строго положительных сторон многоугольника Ньютона* $N(G, \widehat{f})$.

Сначала Б. Мальгранж показал, что формальное решение всегда имеет тип Жевре порядка $1/k'$, если k' — наименьшая сторона $N(G, \widehat{f})$ [Ma3].

Сформулированный выше результат принадлежит И. Сибуя [Si1], который доказал его с точки зрения когомологий, оценивая с помощью линеаризации 1-коцепь экспоненциальных ошибок, ассоциированных с квазифункцией, определенной рядом $\widehat{f}$.

Предыдущие результаты улучшаются с помощью мультисуммируемости.

Определение. Пусть $k_1 > k_2 > \ldots > k_r > 0$ — действительные числа. Мы будем говорить, что $\widehat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ является $(k_1, \ldots, k_r)$-*суммируемой*, если она $(k_1, \ldots, k_r)$-суммируема по всем направлениям, кроме, может быть, некоторого конечного числа.

Теорема. *Пусть $G(x, Y_1, \ldots, Y_n)$ — аналитическая функция $n+2$ переменных и $\widehat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ — формальный ряд, являющийся решением дифференциального уравнения*

$$G(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Пусть $k_1 > k_2 > \ldots > k_r > 0$ — строго положительные стороны многоугольника Ньютона $N(D, \widehat{f})$. Тогда $\widehat{f}$ $(k_1, \ldots, k_r)$-суммируема.

В линейном случае первое доказательство этого результата принадлежит автору этих заметок [Ra2], [MR3]; другие доказательства можно найти в [BBRS] и [Mar]. В нелинейном случае этот результат недавно доказал Брааксма (Braaksma), использовавший подход Ж. Экалля. В настоящее время готовится доказательство Рамиса и Сибуя в стиле [RS1].

3.2. Нормальные формы дифференциальных уравнений и диффеоморфизмы.

Сначала рассмотрим случай локальных голоморфных диффеоморфизмов в начале координат комплексной плоскости. Такой диффеоморфизм

$$f\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$$

определен сходящимся рядом

$$f(x) = \lambda x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \in x\mathbb{C}\{x\},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Пуанкаре доказал, что при $|\lambda| \neq 1$ такой диффеоморфизм *аналитически сопряжен* со своим касательным линейным отображением $f_0\colon x \mapsto \lambda x$ в начале координат. Иначе говоря, существует аналитическая замена переменных $x = \psi(t)$, удовлетворяющая условию $\psi'(0) \neq 0$ и такая, что $f = \psi \circ f_0 \circ \psi^{-1}$ или $f \circ \psi = \psi \circ f_0$.

- Если $|\lambda| \neq 1$, то говорят, что λ *лежит в области Пуанкаре*, иначе говорят, что λ *лежит в области Зигеля.*
- Если λ — корень из единицы, то говорят, что это *резонансный диффеоморфизм.*
- Если $|\lambda| = 1$, но λ — не корень из единицы, то можно доказать, что f линеаризуема формально (существует формальная замена переменных $\widehat{\psi}$, сопрягающая f и f_0), но не всегда линеаризуема аналитически (ряд $\widehat{\psi}$ не обязательно сходится). Мы больше не будем задерживаться на этом сложном случае, его изучение связано с задачами об аппроксимации действительных чисел рациональными.

Нас интересует резонансный случай. Диффеоморфизм f в общем случае уже не будет формально линеаризуемым, и первая из возникающих здесь задач состоит *в формальной классификации* резонансных аналитических диффеоморфизмов. Чтобы упростить изложение, отныне мы ограничимся диффеоморфизмами f, касательными к тождественному:

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \in x\mathbb{C}\{x\}.$$

Каждый класс формальной эквивалентности (то есть по модулю формальной замены переменных) представляется (сходящейся) *нормальной формой*, выбранной произвольно (ищут «самую простую из возможных форм»). В качестве нормальных форм удобно выбирать множество $f_{\beta,k,\lambda} = \exp(X_{\beta,k,\lambda})$ с параметрами $(\beta,\, k,\, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$, где $X_{\beta,k,\lambda}$ — векторное поле

$$X_{\beta,k,\lambda} = \beta \frac{x^k}{1 + \lambda x^k}.$$

Можно легко свести все к случаю $\beta = 2i\pi$ и обозначить $X_{2i\pi,k,\lambda} = X_{k,\lambda}$. Чтобы еще больше упростить изложение, мы ограничимся случаем, когда

нормальная форма равна

$$f_{1,0}(x) = \frac{x}{1 - 2i\pi x}$$

с $X_{1,0} = 2i\pi x^2 d/dx$. Гомографическая замена координат $x = \frac{1}{z}$ на римановой сфере сопрягает нормальную форму $f_{1,0}$ с переносом $T(z) = z - 2i\pi$. Заметим, что функция $e^{1/x}$ постоянна на орбитах $f_{1,0}$. Она позволяет отождествить пространство орбит для $f_{1,0}$ с римановой сферой с разрезом от 0 до ∞, то есть с $\mathbb{C}^*$ (которое топологически эквивалентно цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$). В дальнейшем будем обозначать $f_0 = f_{1,0}$. Имеем

$$f_0(x) = x - 2i\pi x^2 - 4\pi^2 x^3 + \ldots.$$

Любой локальный диффеоморфизм, голоморфный форме

$$f(x) = x - 2i\pi x^2 - 4\pi^2 x^3 + O(x^4),$$

формально сопряжен с f_0 (но, в общем случае, не сопряжен аналитически). Точнее, существует *единственный* формальный диффеоморфизм $\widehat{\psi}$, касательный к тождественному и такой, что $f \circ \widehat{\psi} = \widehat{\psi} \circ f_0$. Этот диффеоморфизм «в общем» расходится, но важно то, что он 1-суммируем по всем направлениям, кроме действительных полуосей $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^-$. Суммы ψ_d диффеоморфизма $\widehat{\psi}$ по разным направлениям d суммируются, когда d меняется, не пересекая действительной оси. Итак, в конечном счете получаем *две* суммы ψ^+ и ψ^- (верхнюю и нижнюю) диффеоморфизма $\widehat{\psi}$. Они определены на соответствующих секторах с размыканием 3π. Пересечение этих секторов состоит из *двух* секторов с размыканием π, содержащихся в $\mathrm{Re}\, x > 0$ и $\mathrm{Re}\, x < 0$ соответственно. В каждом из этих секторов сумму можно определить двояко, здесь и возникает *феномен Стокса.*

Обратимся теперь к классификации голоморфных локальных диффеоморфизмов, формально сопряженных с f_0, по аналитическому модулю эквивалентности (два диффеоморфизма эквивалентны, если они сопряжены аналитически). Удивляет тот феномен, что фактор-пространство очень велико: оно бесконечномерно. Оно существенно параметризуется парами $(\varphi_0, \varphi_\infty)$, где φ_0 и φ_∞ — локальные диффеоморфизмы римановой сферы, касательные к тождественному преобразованию в 0 и в ∞ соответственно, но, вместе с тем, *совершенно произвольные.*

Действительно, локальный голоморфный диффеоморфизм f, формально сопряженный с f_0, существенно классифицируется своим пространством

орбит. Это пространство легко описать с помощью феномена Стокса. Оно представляет собой «связную (неразделенную?) комплексную кривую», получаемую следующим образом.

Каждая сумма ψ^+ и ψ^- диффеоморфизма ψ, сопрягающего f и f_0, позволяет отождествить некоторое подмножество пространства орбит f с пространством орбит f_0, то есть с цилиндром $\mathbb{C}^* = P^1(\mathbb{C}) - \{0, \infty\}$. Если сравнить эти два отождествления с помощью двух явлений Стокса по направлениям $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^-$, то получим две копии римановой сферы $P^1(C)$, склеенные в 0 и в ∞ аналитическими диффеоморфизмами φ_0 и φ_∞, касательными к тождественному. Можно доказать (теорема синтеза), что эти диффеоморфизмы выбираются произвольно.

Предыдущие результаты получены Т. Кимурой, Ж. Экаллем [E2], Б. Мальгранжем [Ma4] и Ворониным.

Классифицировав резонансные диффеоморфизмы, можно перейти к аналогичной задаче для ростков в $(0, 0)$ — начале координат $\mathbb{C}^2$ — аналитических дифференциальных уравнений вида $\omega = P\,dy + Q\,dx = 0$, где P и Q принадлежат $\mathbb{C}\{x, y\}$. 1-струя функции ω в начале координат имеет вид $J^1\omega = \lambda x\,dy + \mu y\,dx$. Если $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ и $\lambda/\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, то мы находимся в области Пуанкаре и ω аналитически сопряжено с $J^1\omega$. Иначе рассуждения усложняются. Как и для диффеоморфизмов, нас будут интересовать только резонансные случаи. Это случаи, когда λ или μ (но не оба вместе) равны нулю (вырожденный случай) или когда λ, μ не равны нулю и $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}^-$ (невырожденный случай). Геометрически (ссылаясь на действительный случай) в вырожденном случае имеем *узловую горловину*[20], в невырожденном — *резонансную горловину*.

Узловая горловина описывается уравнением $x^{k+1}dy + \lambda y\,dx + \ldots = 0$, где $k \in \mathbb{N}^*$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Резонансная горловина описывается как $px\,dy + qy\,dx + \ldots = 0$, где $p, q \in \mathbb{N}^*$.

Как и в случае резонансных диффеоморфизмов, формальные нормальные формы параметризуются конечным числом параметров, а замены переменных, сводящие резонансное уравнение к его нормальной форме, требуют использования рядов типа Жевре. Можно доказать, что эти ряды k-суммируемы. При фиксированной формальной нормальной форме резонансные дифференциальные уравнения аналитически существенно классифициру-

[20] noeud-col (франц.)

ются *пространствами их листов* (т.е. слоения). Это пространство описывается с помощью феномена Стокса.

Действительно, классификация уравнений связана с классификацией диффеоморфизмов посредством голономии. Узловая горловина всегда допускает гладкий аналитический лист в качестве решения в начале координат (сильное многообразие). Резонансная горловина всегда допускает два таких решения (трансверсальных). Конечно, требуется удалить начало координат: тогда эти решения существуют в окрестности начала координат в проколотых кругах. Можно изобразить комплексную трансверсаль к одному из этих проколотых кругов, затем — простой разрез с началом на трансверсали, к проколотому кругу. Используя этот разрез, мы получаем перестановку листов, которую рассматриваем как диффеоморфизм на трансверсали: это диффеоморфизм голономии. В случае резонансной горловины классификация уравнений отождествляется с классификацией их голономий. В случае узловой горловины мы не получим всех голономий. В качестве примера возьмем формальную нормальную форму узловой горловины:

$$\omega_0 = x^2 dy + y\, dx = 0.$$

Ее голономия $f_0(x) = \dfrac{x}{(1-2i\pi x)}$.

Аналитические узловые горловины, формально сопряженные с $\omega_0 = 0$, существенно классифицируются парами локальных диффеоморфизмов (аналитических и касательных к тождественному) $(\varphi_0, \varphi_\infty)$ в 0 и в ∞ на римановой сфере (где φ_0 произвольно, но φ_∞ — *перенос*).

Эти результаты получены Ж. Мартине и Ж.-П. Рамисом [MR1], [MR4], [MR5] и [Ma4]. Они играют фундаментальную роль при ответе на некоторые предположения Р. Тома о голоморфных листах [Mou] и в недавнем решении задачи Дюлака (конечность количества предельных циклов для алгебраического дифференциального уравнения $P\,dy + Q\,dx = 0$ на действительной плоскости)[21].

3.3. Сингулярные возмущения, запаздывание бифуркации и утки

Как мы видели, теория асимптотических разложений Жевре очень эффективна при изучении существенных особенностей дифференциальных уравнений. Речь идет об особенностях *переменных*. Эта теория точно так же

[21]Задача Дюлака — это подзадача второй части шестнадцатой проблемы Гильберта.

используется при изучении некоторых задач, требующих введения особенностей в *параметре*: задач о *сингулярных* возмущениях. Вот существенный результат в данном направлении.

Теорема (И. Сибуя). *Пусть* $n \in \mathbb{N}^*$ *— фиксированное целое число. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида*

$$\varepsilon^\sigma \frac{dy}{dx} = F(x, \varepsilon, y) = f(x, \varepsilon) + A(x, \varepsilon)y + \sum_{|p| \geqslant 2} f_p(x, \varepsilon) y^p, \tag{1}$$

где $\sigma \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon, x \in \mathbb{C}$, $y \in C^n$, f, F *и все* f_p *принимают значения из* $\mathbb{C}^n$, *а* A *принимает значения из* $\mathrm{End}(n, \mathbb{C})$. *Предположим, что* F *— аналитическая по* (x, ε, y) *в окрестности* $(0, 0, 0)$, $f(0, 0) = 0$, *а матрица* $A(0, 0)$ *обратима. При этих условиях:*

(i) уравнение (1) допускает единственное формальное решение вида

$$y = \widehat{f}(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n(x) \varepsilon^n,$$

где a_n *— функции, голоморфные в одном и том же круге* D *плоскости переменных* x.

(ii) При уменьшении круга D *функции* a_n *удовлетворяют оценкам Жевре порядка* $1/\sigma$:

$$\|a_n\| \leqslant Cn!^{1/\sigma} A^n,$$

при подходящих $C, A > 0$ *(здесь* $\|a_n\| = \sup_{x \in D} \|a_n(x)\|$*).*

И. Сибуя дал когомологическое доказательство этого результата в [Si2]. В действительности он доказал более точный результат, построив 0-коцепь f_i решений уравнения (1), где f_i голоморфны по (x, ε) на произведении D и сектора по ε, допускают асимптотическое разложение в ряд $\widehat{f}$ типа Жевре порядка $1/\sigma$ по ε равномерно по x из D. М. Каналис – Дюран (Canalis – Durand) дал доказательство этой теоремы при $n = 1$ с помощью прямых оценок [CD2]. С другой стороны, Шеффке (Schäffke) недавно получил новое доказательство, обратившись к уточненной форме теоремы Мелле [Sc].

Следуя идее Ж. Мартине [MaR], мы применим вышеуказанный результат к задаче об *запаздывании бифуркации*. Здесь будет удобно перенестись в рамки нестандартного анализа[22].

[22]Дальнейшее легко можно прочитать на эвристическом уровне. В действительности все

Основная идея — принадлежащая Ж. Мартине [MaR] — состоит в том, чтобы смоделировать классическую среду численного анализа: вычислительная машина (возможно, это математик, снабженный бумагой и карандашом) *обеспечивает некоторую ограниченную точность при вычислении значений функции. Возможность обращения с большими числами ограничена; слишком маленькое число считается нулем, слишком большое рассматривается как бесконечность* (*переполнение*). Эту ситуацию можно смоделировать, задав раз и навсегда бесконечно малое действительное число $\varepsilon' > 0$: мы «не увидим» комплексное число α порядка ε' (иначе говоря, такое, что α/ε' ограничено, то есть не бесконечно велико); с другой стороны, α не будет «показано», если его модуль не бесконечно мал по сравнению с $1/\varepsilon'$ (то есть если $\alpha\varepsilon'$ не бесконечно мало).

Тогда можно переделать предыдущее описание квазифункций, заменяя экспоненциально малые поправки на поправки порядка ε'. Получаем словарь для двух точек зрения на одну и ту же область (на плоскость — нестандартную — комплексной переменной ε), где функция e^{-a/ε^k} (со стандартным или ограниченным a) имеет порядок ε'.

Явление запаздывания бифуркации происходит от феномена экспоненциального сжатия-взрыва траекторий. Простейшая из ситуаций, в которой можно наблюдать этот феномен, следующая. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x, \\ \dot{\mu} = \varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — бесконечно малое фиксированное действительное число, а μ и x — действительные переменные. Если ненулевой параметр μ фиксирован, получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \mu x.$$

Точка $x = 0$ — устойчивая стационарная при $\mu < 0$ и неустойчивая при $\mu > 0$. Если изменять μ, то при $\mu = 0$ устойчивость меняется на неустойчивость. Теперь рассмотрим решение (1), определенное начальными условиями $x = x_0$ и $\mu = \mu_0 < 0$. Обычное интегрирование показывает, что решением здесь будет

$$x = x_0 e^{\frac{\mu^2 - \mu_0^2}{2\varepsilon}}.$$

обсуждается очень строго. Использована точка зрения Нельсона в ANS [DR]; необходимая величина из ANS... бесконечно мала.

Оно бесконечно мало (экспоненциально по ε) при $\mu \in [\mu_0, -\mu_0]$. Оно «убывает почти вертикально» от (μ_0, x_0) до $(\mu_0, 0)$, продолжается «экспоненциально почти вдоль» действительной оси вплоть до $(-\mu_0, 0)$, затем «поднимается почти вертикально». Имеем (почти...) «вход» в точке $(\mu_0, 0)$ и «выход» в точке $(-\mu_0, 0)$.

Теперь рассмотрим систему (размерности $p+1$):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = F(x, \lambda), \\ \dfrac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda} = \varepsilon, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — бесконечно малое фиксированное комплексное число (или «малый параметр», по выбору), x — переменая из $\mathbb{C}^p$, λ — комплексная переменная, F — голоморфная функция со значениями в $\mathbb{C}^p$. Из системы (2) можно вывести дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \frac{dx}{d\lambda} = F(x, \lambda). \tag{3}$$

Полагая $\varepsilon = 0$, получаем «медленную кривую» $F(x, \lambda) = 0$. Предположим, что эта кривая $\mathcal{C}_0$ — график аналитической функции $x = c_0(\lambda)$.

Теперь предположим следующее:

(i) Матрица $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$ обратима.

(ii) Медленная кривая $\mathcal{C}_0$ трансверсальна полю

$$F(x, \lambda)\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \lambda}. \tag{2$'$}$$

Если медленная кривая инвариантна в этом поле, мы получаем ситуацию, очень близкую к вышеописанной. Это — экспоненциальное сжатие-взрыв. Случай, когда выполняется условие (ii), сложнее. Мы покажем, что здесь всегда есть экспоненциальное сжатие-взрыв (в выбранной подходящим образом окрестности начала координат), «сводя все к предыдущему случаю», то есть используя экспоненциально точную квазикривую (квази)инвариантную в поле (2′).

Эта квазикривая является «графиком» некоторой квазифункции — (квази)решения уравнения (3), полученного следующим образом. По сформулированной выше теореме Сибуя уравнение (3) допускает формальное решение (формальное по ε, аналитическое по λ):

$$\widehat{g}(\lambda, \varepsilon) = c_0(\lambda) + \sum_{n \geqslant 1} c_n(\lambda)\varepsilon^n.$$

Более того, все c_n — ограниченные голоморфизмы на одном и том же круге D (стандартного) радиуса $r > 0$ на плоскости переменных λ и удовлетворяют неравенствам Жевре первого порядка:

$$\|c_n\| \leqslant Cn!A^n,$$

при подходящих C, $A > 0$ (здесь $\|c_n\| = \sup_{x \in D} \|c_n(x)\|$).

Квазисумма этого ряда (полученная, например, с помощью неполного преобразования Лапласа) 1-точна, она будет квазирешением (то есть решением до экспоненциальных погрешностей близкого порядка, типа $e^{-a/\varepsilon}$, где a — ограниченное положительное число). В действительности можно найти представление $\{g_i\}$ этого квазирешения, где g_i — точные решения (3). Отсюда легко делаем вывод (например, используя аргументы «экспоненциальной выпуклости», см. [BCDD]).

Первые математические результаты в задаче об опаздывании к бифуркации принадлежат Нейштадту. Его метод — вариант вышеописанного квазисуммирования до наименьшего члена: осуществляется некоторое (большое) число N замен переменных (где N — целая часть $1/\varepsilon$). Еще существует достаточно геометрический подход к задаче, предложенный Ж.-Л. Калло (J.-L. Callot) в 1991 году.

Вместо того чтобы брать медленную производную векторного поля, как в только что изученной нами задаче, можно взять медленную производную от отображения итерации. Пусть везде $\varepsilon > 0$ — бесконечно малое действительное число. Расмотрим отображение

$$\begin{gathered} F_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \\ (x, \lambda) \mapsto (f(x, \lambda), \lambda + \varepsilon). \end{gathered} \tag{4}$$

Предположим, что существует аналитическая кривая $c_0(\lambda)$, состоящая из фиксированных точек. Можно найти медленную производную отображения Фейгенбаума:

$$f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x),$$

которое дает нам пример хаоса. Наблюдаем запаздывание бифуркации при «удвоении периодов».

Эту ситуацию анализировали А. Фрюшар [F1] и С. Бэсенс (C. Baesens) [Bae]. Методы [F1] следуют тому же направлению, что и Нейштадт; методы [Bae] используют аргументы Ж. Мартине для случая полей.

Для отображения (4) инвариантной кривой будет график функции $\lambda \mapsto U(\lambda, \varepsilon)$, где $F(U(\lambda, \varepsilon), \lambda) = U(\lambda + \varepsilon, \varepsilon)$. Если $\partial_x F(\lambda, c_0(\lambda)) \neq 1$, то существует единственная формальная инвариантная кривая

$$\widehat{U}(\lambda, \varepsilon) = c_0(\lambda) + \sum_{n \geqslant 1} c_n(\lambda)\varepsilon^n,$$

где c_n — ограниченные голоморфизмы на одном и том же круге. В общем случае этот ряд расходится, но имеет тип Жевре 1 [Bae]. Как и в случае полей, получаем квазиинвариантную квазикривую.

Теперь мы увидим, что если в анализе Ж. Мартине отказаться от условия обратимости (i), то могут произойти очень интересные явления: появляются *утки*. Для этого мы обсудим уравнение Ван дер Поля (в котором феномен утки был открыт в [BCDD]) с точки зрения Жевре. Здесь мы следуем (высказывая оригинальную точку зрения на феномен уток) недавней работе М. Каналиса–Дюрана [CD1], [CD2].

Рассмотрим сингулярно возмущенную форму уравнения Ван дер Поля (1920) с действительным бесконечно малым $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \tag{5}$$

Полагая $u = \varepsilon\dot{x} + \frac{1}{3}x^3 - x$, переходим к *плоскости Льенара*. Получаем

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = u - \dfrac{1}{3}x^3 + x, \\ \dot{u} = -x. \end{cases} \tag{6}$$

Векторное поле $((u - {}^1\!/_3 x^3 + x)/\varepsilon, -x)$ «медленно-быстрое»: его горизонтальная составляющая бесконечно велика за исключением медленной кривой — кубической параболы $u = \frac{1}{3}x^3 - x$, на которой она обращается в нуль. Часть кубической параболы между точками $B(-1, \frac{2}{3})$ и $A(1, -\frac{2}{3})$ — *отталкивающая*, остальная часть — *притягивающая*.

Можно показать, что система (5) имеет предельный цикл. Этот цикл «медленно-быстрый». Он бесконечно близок к стандартному циклу, образованному двумя дугами медленной кривой (заканчивающимися в A и B) и двумя горизонтальными отрезками (исходящими из A и B), которые называют его *тенью*. Кроме того, у системы есть *неустойчивая* неподвижная точка $(0, 0)$.

Теперь рассмотрим уравнение Ван дер Поля со вторым членом

$$\varepsilon\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = a, \tag{7}$$

где a — действительный параметр. Будем изменять этот параметр от 0 до 2 и следить за ситуацией на плоскости Льенара. Неподвижная точка $S(a)$ перемещается по медленной кубической параболе: $S(0) = (0,\, 0)$ и $S(1) = A$.

- для $0 < a < 1$ эта точка неустойчива;
- для $a > 1$ она устойчива, но предельный цикл исчезает.

Значение $a = 1$ — это *бифуркация Хопфа*. Задача в том, чтобы понять, как может проявиться эта бифуркация, если принять во внимание медленно-быстрый характер поля. Наблюдая за изменением тени предельного цикла в момент его исчезновения, мы заключаем, что при некоторых частных значениях эта тень должна на момент вытянуться вдоль отталкивающей части медленной кривой (от A к B). По определению, соответствующие значения параметра называются *значения с утками*, а соответствующие циклы — *утками* (с головой или без головы, в зависимости от того, находится точка B в их тени или вне ее).

Чтобы получить значение с уткой, очевидно, необходимо, чтобы a было меньше 1 и бесконечно близко к 1, но хотелось бы знать о нем больше. Тогда можно доказать, что все значения a с уткой имеют одно и то же разложение по *ε-тени*:

$$1 + \sum_{n\geqslant 1} c_n \varepsilon^n.$$

Это приводит к мысли, что «жизнь уток коротка». Действительно, их жизнь экспоненциально коротка: если a_1 и a_2 — значения с уткой, то $\|a_1 - a_2\| < e^{-b/\varepsilon}$ для подходящего ограниченного b. Экспериментально можно установить, что:

- При $\varepsilon = \frac{1}{20}$ уток можно наблюдать примерно между 0,9934909 и 0,9934915.
- При $\varepsilon = \frac{1}{100}$ уток можно наблюдать примерно между 0,9987404512 и 0,9987404513, то есть на промежутке длиной 10^{-10} ... Так что очень сложно «поймать» уток, даже если известно их разложение по ε-тени.

Все это привело меня где-то в 1980 году к гипотезе, что разложение по ε-тени значений с уткой для уравнения Ван дер Поля имеет тип Жевре 1. Если оставить в стороне теоретические вопросы, положительный ответ на эту гипотезу был интересен мне для получения численного метода охоты на уток: если ряд имеет тип Жевре, то, суммируя его с помощью неполного преобразования Лапласа (или квазисуммирования до наименьшего члена), найдем значение, определенное до экспоненциально малой поправки порядка почти ε. Итак, ошибка — величина того же порядка, что и продолжительность существования искомого значения с уткой. Эта гипотеза (с ее численным приложением) сначала была проверена экспериментально, а недавно ее доказал М. Каналис–Дюран [CD1], [CD2], используя среди прочего улучшение вычислений при рекуррентной зависимости коэффициентов c_n, изложенное в [ZS].

М. Каналис–Дюран показал также, что разложение траектории утки по ε-тени само по себе имеет тип Жевре 1 и этим вновь доказал существование уток (с помощью неполного преобразования Лапласа). Его теория приложима к семейству более общих систем, чем уравнение Ван дер Поля. Это семейство содержит такие классические системы, как системы типа брюсселятора.

3.4. q-разностные уравнения

Алгебраическим линейным уравнением в (*конечных*) *разностях в комплексном поле* называется функциональное уравнение вида

$$a_n(x)f(x+n)+\ldots+a_1(x)f(x+1)+a_0(x)f(x)=0,$$

где a_i — многочлены (с комплексными коэффициентами), а f — неизвестная функция. Например,

$$f(x+1)-xf(x)=0\ -$$

разностное уравнение, допускающее в качестве решения функцию $f(x)=\Gamma(x)$.

От дифференциального уравнения к разностному можно перейти, заменяя инфинитезимальный автоморфизм d/dx на автоморфизм переноса $x\mapsto x+1$. Это гомография римановой сферы, допускающая ∞ в качестве неподвижной точки. Можно использовать и более «общую» гомографию, допускающую две различные неподвижные точки, например, $x\mapsto qx$

с ненулевым комплексным q и неподвижными точками 0 и ∞. Тогда приходим к понятию q-разностного (линейного алгебраического) уравнения:

$$a_n(x)f(q^n x) + \ldots + a_1(x)f(qx) + a_0(x)f(x) = 0.$$

Можно доказать, что формальные ряды, являющиеся решениями аналитических разностных уравнений, даже нелинейных, имеют тип Жевре: это аналог теоремы Мелле [GL]. Напротив, для q-разностных уравнений ситуация совсем иная. В этом случае, вообще говоря, оценок Жевре не будет, будут только оценки *q-Жевре* (по терминологии, недавно введенной Ж.-П. Безивином (J.-P. Bezivin)).

Мы ограничимся тем, что происходит в случае $|q| \neq 1$. Имея возможность заменять q на q^{-1}, мы можем предполагать, что $|q| > 1$.

Определение. Пусть $\widehat{f}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ — формальный ряд. Говорят, что $\widehat{f}$ имеет q-тип Жевре вида s, если для подходящих C, A, $s > 0$

$$|a_n| < C|q|^{\frac{sn(n+1)}{2}} A^n.$$

Еще говорят, что вид s *оптимален*, если не существует оценки такого же рода для $s' < s$.

С каждым q-разностным алгебраическим линейным оператором T можно связать многоугольник Ньютона $N(T)$, аналогично случаю дифференциальных операторов. Имеем следующий результат.

Теорема (Ж.-П. Безивин). *Пусть*

$$T(f) = a_n(x)f(q^n x) + \ldots + a_1(x)f(qx) + a_0(x)f(x) = 0 \qquad (1)$$

q-разностное линейное алгебраическое уравнение, где $|q| > 1$. Тогда существует конечное число положительных действительных чисел $s_1 < \ldots < s_r$, заданных сторонами многоугольника Ньютона $N(T)$ и таких, что каждый формальный ряд $\widehat{f}$, являющийся решением (1), обладает следующим свойством: $\widehat{f}$ или сходится, или имеет q-тип Жевре оптимального вида с одним из s_i.

Существуют q-разностные алгебраические линейные уравнения второго порядка с решениями в виде расходящихся формальных рядов (Адамс).

Так что существуют расходящиеся решения q-разностных уравнений, *не допускающие оценок Жевре.*

Вот простой пример. Определим оператор σ_q условием $\sigma_q f(x) = f(qx)$. Обозначим

$$\widehat{\Omega}(x,\,q) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^{n+1}.$$

Тогда $x\sigma_q(q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^{n+1}) = q^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} x^{n+2}$, откуда

$$(x\sigma_q + 1)\widehat{\Omega}(x,\,q) = \sigma_q\widehat{\Omega}(x,\,q) + \widehat{\Omega}(x,\,q) = x. \tag{2}$$

Оператор $x\sigma_q$ — аналог дифференциального оператора $x^2 d/dx$; уравнение (1) — q-аналог уравнения Эйлера

$$(x^2\frac{d}{dx} + 1)y = x^2 y' + y = x,$$

а ряд $\widehat{\Omega}(x,\,q)$ — q-аналог ряда Эйлера $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n! x^{n+1}$. При $q < 1$ ряд $\widehat{\Omega}(x,\,q)$ связан с θ_1-функцией Якоби. Из условия $(\sigma_q - q)(x\sigma_q + 1) = q x\sigma_q^2 - x\sigma_q + q - 1$ выводим, что ряд $\widehat{\Omega}(x,\,q)$ — решение q-дифференциального уравнения второго порядка

$$(qx\sigma_q^2 - x\sigma_q + q - 1)f(x) = qxf(q^2x) - xf(qx) + (q-1)f(x) = 0.$$

С точки зрения суммируемости, случай разностных уравнений сложен: формальные решения не будут в общем случае мультисуммируемы [E3]. Для q-разностных уравнений можно развивать теорию, заменяя асимптотические разложения Жевре на асимптотические разложения q-Жевре, при этом экспоненциальное убывание заменяется на оценки вида

$$|f(x)| < e^{-\mu\left(\frac{\log x}{\log q}\right)^2}.$$

Имеются также *q-аналоги* преобразований Бореля и Лапласа и k-суммируемости: числа $n!$ — это *моменты* функции e^{-u}:

$$\Gamma(n+1) = n! = \int\limits_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,du.$$

Вычислим моменты функции $q^{-\frac{v(v+1)}{2}}$ для действительных $q > 1$:

$$\mu_n = \int\limits_0^{+\infty} u^n q^{-\frac{v(v+1)}{2}} du,$$

с $v = \dfrac{\log u}{\log q}$ и $u = q^v$. Находим

$$\mu_n = \sqrt{2\pi \log q} q^{-\frac{1}{8}} q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Заменяя u на ξ/x, получаем

$$\Gamma(n+1)x^{n+1} = n!x^{n+1} = \int\limits_0^{+\infty} \xi^n e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = \mathcal{L}(\xi^n)(x),$$

где $\mathcal{L}$ — преобразование Лапласа и

$$\mu_n x^{n+1} \sqrt{2\pi \log q} q^{-\frac{1}{8}} q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^{n+1} = \int\limits_0^{+\infty} \xi^n q^{-\frac{w(w+1)}{2}} d\xi$$

с $w = \dfrac{\log \xi - \log x}{\log q} = \dfrac{\log \xi/x}{\log q}$. Имеем

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{q^{\frac{1}{8}}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int\limits_0^{+\infty} \xi^n q^{-\frac{v(v+1)}{2}} d\xi.$$

Так что естественно будет определить q-преобразование Лапласа как

$$_q\mathcal{L}\phi(x) = \frac{q^{\frac{1}{8}}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int\limits_0^{+\infty} \phi(\xi) q^{-\frac{w(w+1)}{2}} d\xi$$

с $w = \dfrac{\log \xi - \log x}{\log q}$. Отсюда

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^{n+1} = {}_q\mathcal{L}(\xi^n)(x).$$

Все эти задачи изучаются в настоящее время. (Я предполагаю также, что существует q-вариант теоремы Мелле в нелинейном случае.)

3.5. Множественность естественных процессов суммирования, ветви функций и последнее письмо Эвариста Галуа

Как можно было видеть по предыдущему изложению, возникает возможность приписать расходящемуся ряду «естественную» сумму и радикально улучшить асимптотическую теорию Пуанкаре, заменив ее точной теорией. Так что выполняется программа, намеченная Э. Борелем [Bo2]:

Расходящиеся ряды могут сослужить большую службу не только с формальной точки зрения (в чем никто никогда не сомневался) и с точки зрения приближенных вычислений (асимптотические ряды), но в некоторых случаях их еще и можно точно вычислить. Расходящийся числовой ряд может иметь определенное значение.

Но при более внимательном рассмотрении ситуация кажется менее идиллической. Мы видели, что в действительности в некоторых случаях появляется не одна, а несколько различных естественных сумм. Д. Дюмон во введении к своей книге [Du] цитирует приведенный выше текст и характеризует мнение Э. Бореля как оптимистичное в сравнении с Г. Х. Харди [H1]:

Разные методы могут давать разные суммы для одних и тех же рядов...

С моей точки зрения, феномен множественности естественных сумм это:

- менее удивительно, чем если бы этого не было;
- больше заметных преимуществ, чем неудобств.

Э. Борель[23] и Г. Х. Харди[24] очень хорошо понимали то, что, по моему мнению, является одной из фундаментальных причин этого феномена: *множественность* аналитических продолжений. Больше всего оба они настаивали на том факте, что хорошая теория суммирования должна быть основана на изучении аналитических продолжений.

---

[23] Здесь важно сделать существенное замечание: если аналитическая функция $\phi(z)$ не однозначна, то предыдущая теория ведет к тому, что с расходящимся рядом $\phi(z_0)$ связывает несколько разных значений, даже бесконечных [Bo1, chap. 4, 6.3, p. 153].

[24] Если $\sum a_n x^n$ сходится при малых x и определяет функцию $f(x)$ комплексного переменного x, однозначную и регулярную в открытой и связной области, содержащей начало координат и точку $x = 1$, и если $f(x) = s$, тогда мы назовем s $\mathfrak{S}$-суммой ряда $\sum a_n$. Значение s может естественным образом зависеть от выбора области.

Г. Х. Харди называет $\mathfrak{S}$-методом метод суммирования с помощью аналитического продолжения, на который мы ссылались в 1.5:

...тогда мы называем $\mathfrak{S}$-суммой сумму ряда $\sum a_n$. Значение s может естественным образом зависеть от выбора области.

Он также писал по поводу идей Эйлера о суммировании, о которых мы говорили выше, в 1.1:

Невозможно точно установить принцип Эйлера, не имея ясного представления о функциях комплексного переменного и об аналитическом продолжении.

Этот фундаментальный феномен появился уже при изучении аналитического продолжения сходящегося ряда вне его области сходимости. Чтобы увидеть это, вернемся к уже изученному в 1.6 примеру:

$$\widehat{f}(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots .$$

При $|x| < 1$ сумма ряда $\widehat{f}$ равна $f(x) = \sqrt{1+x}$. Если бы надо было суммировать ряд

$$1 + \frac{1}{2}(-2) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2)^3 + \ldots,$$

то можно было бы одинаково использовать аналитическое продолжение вдоль луча, исходящего из начала координат с аргументом $\pi - \varepsilon$ (с малым $\varepsilon > 0$) и соединенного с дугой, «убывающей» до -2, и аналитическое продолжение вдоль луча, исходящего из начала координат с аргументом $\pi + \varepsilon$ и соединенного с дугой, «возрастающей» до -2: это и есть выбор ветви или двойственность. В первом случае получаем i, во втором — $-i$. Сравнению двух методов суммирования отвечает, в случае ряда $\widehat{f}$, преобразование $f \mapsto -f$ (действие монодромии вблизи особой точки -1, порождённое особым направлением $\mathbb{R}^-$ с аргументом π).

Феномен Стокса, открытый Стоксом при изучении уравнения Эйри (1.4), полностью аналогичен только что описанному нами феномену смены ветви (как мы отметили выше, эту аналогию можно найти уже в мемуаре Стокса)[25]. С этой точки зрения, феномен Стокса можно описать так.

[25]Расходящиеся ряды обычно делят на два класса, в зависимости от того, все ли время

Пусть $\widehat{f}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ — формальный ряд, суммируемый (или, в более общем случае, мультисуммируемый) по любому направлению, близкому к направлению α, за исключением (особого) направления α. Применяя к ряду $\widehat{f}$ операторы *бокового суммирования* S_α^- и S_α^+, мы получаем две *разные* суммы f_α^- и f_α^+. Здесь также имеет место выбор ветви, то есть двойственность. Работая с подходящей дифференциальной алгеброй, определим *автоморфизм Стокса,* ассоциированный с особым направлением α:

$$\mathrm{St}_{\,\alpha} = (S_\alpha^+)^{-1} S_\alpha^- .$$

В подходящем формализме (см. [MR2] и [MR3]) этот автоморфизм дифференциальной алгебры интерпретируется как *монодромия* вокруг бесконечно близкой к началу координат особой точки, определённой вдоль особого направления α.

Описание феномена Стокса, данное Стоксом для формальных решений уравнения Эйри на бесконечности, очень похоже на только что рассмотренное нами. Грубо говоря, он действует следующим образом: строит базу $\mathcal{B}$ решений уравнения Эйри, используя сходящиеся разложения *в начале координат* (восходящие ряды). Затем он вновь суммирует формальные решения на бесконечности *по разным направлениям* (нисходящие ряды) с помощью *экспоненциально точного* численного метода (вариант суммирования до наименьшего члена). Этот метод достаточно точен, чтобы позволить Стоксу выразить суммы формальных рядов на бесконечности в базе $\mathcal{B}$ с помощью *произвольных констант*; сегодня это выражение известно как *формула связи.* Тогда возникает вот какая проблема: разложения в начале координат — целые функции (начало координат — регулярная точка), и поэтому монодромия вокруг начала координат *тривиальна*, тогда как расходящиеся разложения на бесконечности содержат $\sqrt{x}$ и их монодромия (формальная монодромия) нетривиальна, что явно противоречит только что проведенному анализу. Именно это противоречие вызывало у Стокса растерянность в течение долгих лет, прежде чем он нашел ключ к загадке (см. процитированное выше письмо к невесте):

положительны их члены или попеременно положительны и отрицательны. . . , ряды предыдущего вида появляются как особый вариант общего случая обращения с расходящимися рядами согласно степеням мнимой переменной, как неопределенные формы, при прохождении через которые аналитическое выражение терпит разрыв, аналогичный смене знака в радикале [Sto2, p. 78].

...поскольку нисходящие ряды содержат радикалы, которые не появляются в восходящих рядах, мы можем видеть a priori, что произвольные константы должны быть разрывны.

Описанная нами двойственность появляется также как разрывность констант связи *при пересечении особой прямой*: для особой прямой точность численного метода суммирования Стокса недостаточна для вычисления произвольных констант (одна из них теряется; в действительности речь идет о точном вычислении экспоненциально разбегающегося решения, а для этого надо располагать достаточной экспоненциальной точностью; вдоль особой прямой разбегающееся решение слишком мало, чтобы рассматривать его численно с помощью используемого метода!). Продолжим анализ Дингла [Di, chap. 1, p. 7]:

Лучи Стокса для асимптотических рядов определяются теми фазами, для которых ряд (включая его множитель) достигает максимума экспоненциального преобладания над связанной с ним функцией.

(Разрывность произвольных констант появляется в момент максимального преобладания экспоненциально доминантного символа над экспоненциально рецессивным.)

Только что развитая нами точка зрения заметно отличается от традиционного подхода к феномену Стокса[26]. Согласно этому подходу феномен состоит *в смене преобладания* среди двух экспонент; итак, его можно наблюдать вдоль линий осцилляции или *линий Стокса*. Напротив, в нашем описании (и у самого Стокса) феномен проявляется на особых прямых (которые иногда называют линиями *анти-Стокса*). Источник этого различия — в противопоставлении традиционного видения расходящихся рядов как асимптотических и концепции расходящихся рядов как кодирующих точные решения. В одном случае акцент делается на асимптотике в смысле Пуанкаре (и фундаментальная природа феномена не воспринимается), в другом случае используется *точная* асимптотика (см. также [CNP]).

Продолжим сравнивать смену алгебраических ветвей и смену ветвей в феномене Стокса. Если между этими двумя феноменами есть глубокая аналогия (речь идет о двух случаях *преобразований Галуа*: об автоморфизмах дифференциальных алгебр), то есть также и радикальные различия.

[26]Только Дингл, по-видимому, устраняется от этого подхода и продолжает оригинальные идеи Стокса. Впрочем, он называет линиями Стокса то, что другие авторы называют линиями анти-Стокса (у нас: особые прямые). Это соответствует смыслу одной из его центральных идей: поиску точной асимптотической теории. Его *полные асимптотические разложения* — прообраз трансасимптотических разложений.

Например, матрица смены ветви для $(\sqrt{1+x}, \sqrt{1+x^3})$ равна

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

тогда как такая же матрица феномена Стокса St_π для уравнения Эйлера (соответственно для уравнения Эйри) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где β — ненулевое комплексное число.

Вторая матрица *унипотентна*, так как феномен Стокса не обнаруживается асимптотически при переходе через особую прямую: после перехода асимптотические разложения решений не изменились (что совершенно не так в случае смены алгебраических ветвей). Можно показать — в основном, с помощью тех же рассуждений, — что операторы Стокса всегда унипотентны. Отсюда фундаментальное следствие: операторы Стокса St_α — это *инфинитезимальные порождающие* (логарифмы), обозначаемые $\dot{\Delta}_\alpha$:

$$\mathrm{St}_\alpha = e^{\dot{\Delta}_\alpha},$$

где оператор $\dot{\Delta}_\alpha$ — производная Галуа, то есть производная, коммутирующая с обычной, именуемая *ориентированной посторонней производной.* Это позволяет изучать феномен Стокса *инфинитезимально.* Эту точку зрения открыл и систематически изучал Жан Экалль: *Восходящие функции, Постороннее дифференциальное исчисление, Ускорение* [E1], [E2], [E3], [E4], [Ca] и [CNP].

Накануне дуэли, на которой ему предстояло умереть, Эварист Галуа писал в своем последнем письме, адресованном своему другу Огюсту Шевалье [G1]:

Знаешь, мой дорогой Огюст, эти темы — не единственные, которые я исследовал. С некоторых пор главные мои размышления были направлены на приложение теории двойственности к трансцендентному анализу. Хотелось бы a priori увидеть связь между трансцендентными величинами, или трансцендентными функциями, увидеть, какие замены можно было бы сделать, какие величины можно было бы подставлять вместо данных так, чтобы эта связь не могла исчезнуть. Это заставляет сразу признать невозможными многие выражения, которые можно было бы искать. Но

у меня нет времени, а мои идеи на этой, вообще говоря, обширной почве еще не очень развиты.

Значение этого текста, по-видимому, долгое время оставалось довольно загадочным. Но сегодня мне кажется возможным прояснить большую его часть. В своем предисловии к *Полному собранию сочинений* Галуа [G3] Жан Дьедонне писал:

...но остается место для раздумий о том, что он должен был быть очень близок к идее «римановой поверхности», связанной с алгебраической функцией, и что такая идея должна была стать фундаментальной в его исследованиях, которые он называл «теорией двойственности»....

Эта гипотеза несколько проясняет вопрос, но если внимательно перечитать слова Галуа, то кажется очевидным, что идея римановых поверхностей в лучшем случае касается только *одной* части его «теории двойственности». Я думаю, что Софус Ли, Эмиль Пикар и особенно Жюль Драш угадали, в каком направлении в действительности шли последние исследования Галуа. В своем предисловии к *Полному собранию сочинений* Галуа [G2] Эмиль Пикар писал:

...он ...создал бы, в ее существенной части, теорию алгебраических функций одной переменной в том виде, в каком мы ее знаем сегодня. Размышления Галуа шли еще дальше; он заканчивает свое письмо словами о приложении теории двойственности к трансцендентному анализу. Можно почти угадать то, что он под этим понимал, и на этой обширной, как он говорил, почве еще и сегодня остается много открытий, которые предстоит совершить...

Очевидно, нам остается угадать, что хотел сказать Пикар! Если вспомнить, что он один из основателей дифференциальной теории Галуа (теория Пикара–Вессио), то кажется достаточно разумным думать, что, по его убеждению, у Галуа были некоторые идеи относительно этой теории. Во всяком случае, в этом был убежден Жюль Драш, написавший в конце своей диссертации:

Мы были бы счастливы, если бы наша работа могла привлечь внимание к нескольким строкам, которыми заканчивается письмо Галуа, и если бы ее можно было рассматривать как первую попытку объяснить выраженные там мысли.

Вместе с тем, несколькими годами раньше, в 1895, во время своей лекции об этой работе Галуа в честь столетия Высшей Нормальной Школы Софус Ли выступил точно в том же духе [L]:

Последние указания в научном завещании Галуа не менее замечательны, хотя он выразил их в такой смутной форме, что с трудом можно угадать его мысль. Действительно, нельзя сомневаться, что Галуа намеревался исследовать не только группы подстановок, но и группы преобразований с совершенно общей точки зрения и что он мечтал об их применении в анализе. Сейчас практически невозможно понять, думал он о непрерывных группах, или о разрывных, или о тех и других одновременно; и мы не можем сказать, какую пользу он собирался из них извлечь, но, конечно же, Галуа предчувствовал значение, которое могли приобрести в других областях те идеи, которые привели его к столь блистательному успеху в теории алгебраических уравнений.

Со своей стороны, вот уже несколько лет как я читаю письмо Галуа, и мне сразу показалось очевидным[27], что идеи Галуа по теории двойственности предварили дифференциальную теорию Галуа и даже — в некоторой мере — то, что я недавно читал по этой теории. Невозможно узнать, имел ли Галуа понятие о феномене Стокса и о его природе, связанной с теорией Галуа, что я счел очевидным в [Ra3]. (Изучение фрагментов вычислений, найденных в его бумагах [G3], не позволяет делать такие выводы.) Напротив, я, как и Жюль Драш, уверен, что Эварист Галуа понимал, что некоторые преобразования в комплексном анализе (двойственности. . .) имеют «природу Галуа», как, например, «рекалибровка» экспонент (ее прототипом будет замена $e^{\frac{1}{x}}$ на $\lambda e^{\frac{1}{x}}$ с фиксированным ненулевым комплексным числом λ во всех формулах). Очевидно, эта уверенность очень субъективна, и я не в состоянии обосновать это утверждение, что не мешает мне верить в него... Во всяком случае, я считаю, что развитие исследований в этой области должно в конце концов сделать «очевидным» понимание последних размышлений Галуа.

Для дифференциальных уравнений дифференциальная теория Галуа играет ту же роль, что и классическая теория Галуа для алгебраических уравнений. Чтобы как следует понять этот предмет, лучше всего обратиться к оригинальной идее Галуа, выраженной им в особенно ясной манере [G2], [G3]:

[27] Во время этого чтения я не знал ни о тексте Драша, случайно открытом мной несколькими неделями позже, когда я искал ссылку по просьбе Н. Камрана, ни о тексте Пикара, о котором мне сообщил Д. Беннекин после обзора моей интерпретации последнего письма Галуа на моем семинаре в Страсбурге, ни о тексте С. Ли, о котором мне сообщил Ж. Б. Бост после опубликования первой версии этого текста. . .

Предложение I 3b. *Пусть дано уравнение, имеющее m корней a, b, c, … Всегда найдется группа перестановок букв a, b, c, …, удовлетворяющая следующему условию:*

1) пусть каждая функция корней, инвариантная при подстановках из этой группы, будет рационально-известной;

2) обратно, пусть каждая рационально определенная функция корней будет инвариантна при этих подстановках.

Дифференциальная теория Галуа была открыта Пикаром и Вессио [Pi], [V]. Заинтересованный читатель может просмотреть замечательное введение [Ka]. Так же можно использовать [MR2], [Ra6] и более технические статьи [Ra4], [Mi], чтобы узнать больше о связи расходящихся рядов с дифференциальной теорией Галуа. Здесь мы удовлетворимся несколькими указаниями и при этом ограничимся линейным случаем. Пусть (K, ∂) — дифференциальное тело нулевой характеристики, а $C = \{c \in K;\ \partial c = 0\}$ — тело его констант. (Например, для $(\mathbb{C}(x),\ d/dx)$, $(\mathbb{C}\{x\},\ x^2 d/dx)$ и $(\mathbb{C}\{\{x\}\},\ x^2 d/dx)$ телом констант будет C.)

Пусть $D = a_n(d/dx)^n + \ldots + a_1 d/dx + a_0$ — дифференциальный оператор с коэффициентами из K. Связанное с D *расширение Пикара–Вессио* L — дифференциальное надтело для K, дифференциально порожденное над K фундаментальной системой решений D; при этом тело констант C остается неизменным. Если C алгебраически замкнуто, то такое расширение существует и единственно (с точностью до изоморфизма). По определению, *дифференциальная группа Галуа* оператора D над телом K — это группа $\mathrm{Gal}_K(D) = \mathrm{Aut}_K(L)$ K-автоморфизмов дифференциального тела L. Элемент σ из $\mathrm{Gal}_K(D)$ — это векторное C-пространство решений D в L. Отсюда выводим (фиксируя базис этого пространства) представление $\mathrm{Gal}_K(D)$ в $\mathrm{GL}(n;\ C)$. Полученная подгруппа группы $\mathrm{GL}(n;\ C)$ — *алгебраическая* (то есть она определена многочленами n^2 переменных).

Дифференциальные группы Галуа можно вычислять, зная монодромию (формальную или нет), упомянутую выше «рекалибровку» экспонент и феномен Стокса.

Чтобы закончить это направление, процитируем довольно удивительный результат, полученный К. Мичи (C. Mitschi) с помощью суммирования

расходящихся рядов [Mi][28]. Рассмотрим функцию

$$K(t) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x^7 - tx} dx.$$

Эта функция — преобразование Лапласа для $x^{-\frac{1}{2}} e^{-x^7}$, она удовлетворяет линейному алгебраическому дифференциальному уравнению седьмого порядка:

$$D_K K = 7K^{(7)} + tK' + \frac{1}{2}K = 0.$$

Если в этом дифференциальном уравнении произвести замену переменной $z = \left(\frac{1}{7}t\right)^7$ (ветвление), то полученная из K функция U удовлетворяет обобщенному конфлюэнтному гипергеометрическому дифференциальному уравнению

$$D_{7,1}U = 0,$$

где $D_{7,1} = z\left(\partial + \frac{1}{14}\right) + \prod_{r=0}^{6}\left(\partial - \frac{1}{7}r\right)$ и $\partial = z\, d/dz$.

Можно показать, что для $D_{7,1}$ дифференциальная группа Галуа равна[29]

$$\mathrm{Gal}_{C(x)}(D_{7,1}) = G_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Монодромия оператора D_K очевидно тривиальна; отсюда: дифференциальная группа Галуа для D_K равна

$$\mathrm{Gal}_{C(x)} D_K = G_2.$$

Связь между «особой функцией» K и группой исключений G_2 похожа на связь, существующую между функциями Эйри A или B и группой $\mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ [MR2].

В конце этой работы мне остается отметить, что я не смог рассказать обо всех приложениях расходящихся рядов, даже ограничиваясь случаем,

[28] Несколько раньше Н. Кац [Kat2], [Kat3] получил тот же результат с алгебраической точки зрения.

[29] Группа G_2 (или скорее ее представление в размерности 7) — это алгебраическая подгруппа комплексной размерности 14 специальной ортогональной группы $\mathrm{SO}(7; \mathbb{C})$. Действительнозначная разновидность этой группы обладает хорошими свойствами: это группа автоморфизмов алгебры октав Кэлли и — топологически — слой базы сферы S^6, чьи слои — это слои базы S^5 и слоя S^3 [Pos].

когда имеют место оценки Жевре и/или экспоненциально малые поправки. (Среди наиболее значительных пропусков я бы процитировал недавние замечательные работы о стационарном уравнении Шредингера в полуклассической «точной» постановке [Vo], [CNP], как и принадлежащее Шеффке и Фолькмеру доказательство несуществования изокордных овалов с двумя «центрами».) Другие области математики или физики

- адиабатические инварианты,
- квантовая теория поля (инстантоны, ренормалоны, ряды возмущений и т. д.),
- «термодинамическое» изучение задачи о коммивояжере,
- солитоны и т. д.,

очевидно, зависят от этой последней проблематики, хотя на данный момент здесь немного точных теоретических результатов. Остается огромное количество работы!

Литература

[AS] M. Abramowitz, I. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standard, U.S.A. (1964).

[Ai] Airy. *On the Intensity of Light in the Neighbourhood of a Caustic*. Camb. Phil. Trans., Vol. VI, 379.

[Bae] C. Baesens. *Courbes invariantes d'une application lente rapide analytique et retard à la bifurcation de doublement de période*. Preprint CEN Saclay, France (1991).

[Ba1] W. Balser. *A different characterization of multisummable power series*. Preprint Universität Ulm, (1990).

[Ba2] W.Balser. *Summation of formal power series through iterated Laplace transform*. Universitat Ulm, preliminary version (1991).

[BBRS] W. Balser, B. L. J. Braaksma, J. P. Ramis, and Y. Sibuya. *Multisummability of Formal Power Series Solutions of Linear Ordinary Differential Equations*. Preprint Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota, Minneapolis, IMA 717 (1990), to appear in Asymptotic Analysis (1991).

[Bar] E. J. Barbeau. *Euler subdues a very obbstreperous series*. Amer. Math. Monthly 86 (1979), p. 356–372.

[BCDD] E. Benoît, J.-L. Callot, F. Diener, M. Diener. *Chasse au canard*. Collectanea Mathematica, 32, 45–75. 1–3 (1981), p. 37–119.

[BH] M. V. Berry, C. J. Howls. *Hyperasymptotics for Integrals with Saddles*. Preprint H. H. Wills Physics Laboratory, Bristol (1991).

[Be] J. P. Bezivin. *Sur les équations fonctionnelles aux q-différences.* Preprint Paris VI (1990).

[Bo1] E. Borel. *Leçons sur les séries divergentes.* Deuxième édition (1928), Gauthier–Villars, Paris.

[Bo2] E. Borel. *Mémoire sur les séries divergentes.* Ann. Sc. École Norm. Sup., Paris (3), 16 (1899).

[Br1] B. L. J. Braaksma. *Multisummability and Stokes Multipliers of Linear Meromorphic Differential Equations.* J. Differential Equations 92 (1991), p. 45–75.

[Br2] B. L. J. Braaksma. *Multisummability of formal power series solutions of nonlinear meromorphic differential equations.* Preprint University og Groningen (1991).

[CD1] M. Canalis–Durand. *Caractère Gevrey des solutions canard de I'équation de Van der Pol.* C. R. Acad. Sc. Paris 311, Série I, 1 (1990), p. 27–30.

[CD2] M. Canalis–Durand. *Caractère Gevrey des solutions canard de I'équation de Van der Pol.* Preprint Universite de Nice–Sophia–Antipolis, 264 (1990).

[Can] B. Candelpergher. *Une introduction à la résurgence.* Gazette des Mathématiciens (Soc. Math. France), 49 (1989).

[CNP] B. Candelpergher, J. C. Nosmas, F. Pham. *Approche de la résurgence.* Hermann, Paris 1993.

[Ca] T. Carleman. *Les Fonctions quasi-analytiques.* Gauthier–Villars, Paris (1926).

[C] A. L. Cauchy. C. R. Acad. Sc. Paris 23 (1846), p. 251–255.

[CC] D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky. *Computer assisted number theory.* Springer Lecture Notes in Math, 1240, 1987, p. 1–68.

[DR] F. Diener, G. Reeb. *Analyse Non Standard.* Hermann, Paris (1989).

[Di] R. B. Dingle. *Asymptotic Expansions: their Derivation and Interpretation.* Academic Press (1973).

[Du] D. Dumont. *Les séries divergentes*, livre en cours de rédaction, version provisoire d'août 1987.

[DM] A. Duval, C. Mitschi. *Matrices de Stokes et groupes de Galois des équations hypergéométriques confluentes généralisées.* Pacific Journal of Mathematics, vol. 138, 1 (1989), p. 25–56.

[E1] J. Écalle. *Les Fonctions Résurgentes.* t. I, Publ. Mathématiques d'Orsay (1981).

[E2] J. Écalle. *Les Fonctions Résurgentes.* t. II, Publ. Mathématiques d'Orsay (1981).

[E3] J. Écalle. *Les Fonctions Résurgentes.* t. III, Publ. Mathématiques d'Orsay (1985).

[E4] J. Écalle. *Introduction à I'accélération et à ses applications*, book submitted to Travaux en Cours (1992).

[Eu1] L. Euler. *Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques.* Commentatio 352 indicis Enestroemani, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 17, 1761 (1768), p. 83–106.

[Eu2] L. Euler. *De Seriebus Divergentibus.* Lconardi Euleri Opera Omnia I.14, Teubner, Leipzig–Berlin (1925), p. 601–602. Traduction anglaise par E. J. Barbeau et P. J. Leah, Historia Mathematica, 3 (1976), p. 141–160.

[F1] A. Fruchard. *Thèse.* Univ. Paris 7 (1991).

[F2] A. Fruchard. *Prolongement analytique et systèmes discrets.* Preprint Strasbourg (1991).

[FGA] A. Fuchs, R. Giuliano–ANTONINI. *Théorie génerate des densités.* Ann. Acad. Lincei (1991).

[G1] É. Galois. *Lettre à Auguste Chevallier,* dans *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois.* Gauthier–Villars, Paris (1962).

[G2] É. Galois. *Euvres Mathématiques d'Évariste Galois.* Gauthier–Villars, Paris (1897).

[G3] É. Galois. *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois.* Gauthiers–Villars, Paris (1962).

[GL] R. GÉrard, D. A. Lutz. *Maillet Type Theorems for Algebraic Difference Equations.* Kumamoto J. Math., 3 (1990), p. 11–26.

[Ge] M. Gevrey. *La nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles.* Ann. Sc. École Norm. Sup. (3), 25 (1918), p. 129–190.

[Gi] H. Gingold. *A Necessary Condition for a Power Series to be a Formal Solution of a Singular Linear Differential Equation of Order k.* J. Math. Anal. Appl. 52 (1975), p. 546–552.

[Goo] I. J. Good. *Some relations between certain methods of summation of infinite series.* J. London Math. Soc. (1941), p. 144–165.

[H1] G. H. Hardy. *Divergent Series.* Clarendon Press. Oxford (1949).

[H2] G. H. Hardy. *Note on a divergent series.* Proc. Camb. Phil. Soc., 37 (1941), p. 1–8.

[H3] G. H. Hardy. *On the summability of series by Borel's and Mittag–Leffler's methods.* J. London Math. Soc. 9, (1934), p. 153–157.

[Il'YEY] Y. Il'yashenko, P. M. Elizarov, Y. Yakovenko. *The Stokes Effect in Non Linear Analysis.* livre en préparation, A.M.S.

[J] W. Jurkat. *Summability of Asymptotic Series.* Preprint Universitat Ulm, (1990).

[Ka] I. Kaplansky. *An Introduction to Differential Algebra.* Hermann, Paris (1957).

[Kat1] N. M. Katz. *On the calculation of some differential Galois Groups.* Inventiones Math. 87 (1987).

[Kat2] N. M. Katz. *Exponential sums and differential equations.* book to appear (preprint 1989).

[Kat3] N. M. Katz. *Exponential Sums over Finite Fields and Differential Equations over the Complex Numbers: some Interactions.* A.M.S. winter meeting, 1989.

[L] S. Lie. *Influence de Galois sur le développement des mathématiques.* Le centenaire de l'École Normale Supérieure, 1795–1895, Paris, Libraire Hachette, 1895, p. 481–489 (Gesammelte Abhandlugen, VI, p. 592–601).

[Le] E. Leroy. *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor.* Ann. Fac. Univ. Toulouse (1900), p. 317–430.

[LR1] M. Loday–Richaud. *Sommation des séries provenant de systèmes différentiels linéaires.* Journées X-UPS, Prépublications du Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1991.

[LR2] M. Loday–Richaud. *Introduction à la multisommabilité.* Gazette des Mathématiciens, Soc. Math. France (avril 1990).

[Lu] Y. L. Luke. *The Special Functions and their Approximations.* vol. 1, Academic Press (1969).

[MOS] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics.* Springer–Verlag Berlin (1966).

[M] E. Maillet. *Sur les séries divergentes et les équations différentielles.* Ann. Éc. Norm. Sup. Paris (1903), p. 487–518.

[Ma1] B. Malgrange. *Équations différentielles à coefficients polynomiaux.* Progress in Math., Birkhäuser (1991).

[Ma2] B. Malgrange. *Équations différentielles linéaires et tranformation de Fourier: une introduction.* Conférences à l'IMPA, Rio de Janeiro (1988).

[Ma3] B. Malgrange. *Sur le théorème de Maillet.* Asymptotic Analysis 2 (1989), p. 1–4.

[Ma4] B. Malgrange. *Travaux d'Écalle et de Martinet–Ramis sur les systèmes dynamiques.* Sém. Bourbaki 1981–82, exp. 582, Asterisque 92–93 (1982).

[MaR] B. Malgrange, J.-P. Ramis. *Fonctions Multisommables.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 42, 1 (1992).

[Mar] J. Martinet. *Les derniers manuscrits de Jean Martinet.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 42, 31 (1992).

[MR1] J. Martinet, J.-P. Ramis. *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre.* Publ. Math. I.H.E.S. 55 (1982), p. 64–164.

[MR2] J. Martinet, J.-P. Ramis. *Théorie de Galois différentielle et resommation.* Computer Algebra and Differential equations (E. Tournier ed.), Academic Press (1989), p. 117–214.

[MR3] J. Martinet, J.-P. Ramis. *Elementary acceleration and multisummability.* Preprint I.R.M.A. Strasbourg, 428/P-241 (1990), Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique, 54, 4 (1991), p. 331–401.

[MR4] J. Martinet, J.-P. Ramis. *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre.* Ann. Scient. Ecole Normale Sup., 16 (1983), p. 571–621.

[MR5] J. Martinet, J.-P. Ramis. *Analytic Classification of Resonant Saddles and Foci.* Singularities and Dynamical Systems, North–Holland Math. Studies, 103 (1985), p. 109–135.

[Mi] C. Mitschi. *Differential Galois groups and G-functions.* Proceedings CADE 2, 1990, Academic Press (1991).

[Mou] R. Moussu. *Les conjectures de R. Thom sur les singularités de feuilletages holomorphes.* preprint Dijon.

[Ne] Nevanlinna. *Zur Theorie der Asymptotischen Potenzreihen.* Ann. Acad. Scient. Fennicae, ser. A, From XII (1919), p. 1–81.

[O] F. W. J. Olver. *Asymptotics and Special Functions.* Academic Press (1974).

[Pe] O. Perron. *Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizientezn.* Acta Math. 34 (1910), p. 139–163.

[Pi] E. Picard. *Analogies entre la théorie des équations différentielles linéaires et la théorie des équations algébriques.* Gauthier–Villars, Paris (1936).

[P] H. Poincaré. *Sur les groupes des équations linéaires.* Acta. Math. 5 (1884), p. 240–278.

[Pos] M. Postnikov. *Leçons de géométric, groupes et algèbres de Lie*, éditions MIR, Moscou (1982), traduction française (1985).

[Ra1] J.-P. Ramis. *Dévissage Gevrey.* Astérisque 59–60 (1978), p. 173–204.

[Ra2] J.-P. Ramis. *Les séries k-sommables et leurs applications.* Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Proceedings Les Houches 1979, Springer Lecture Notes in Physics 126 (1980), p. 178–199.

[Ra3] J.-P. Ramis. *Phénomène de Stokes et filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot.* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 301 (1985), p. 165–167.

[Ra4] J.-P. Ramis. *Phénomène de Stokes et resommation.* C. R. Acad. Sc. Paris, T. 301 (1985), p. 99–102.

[Ra5] J.-P. Ramis. *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires.* Memoirs Am. Math. Soc. 296 (1984), p. 1–95.

[Ra6] J.-P. Ramis. *A short introduction to differential Galois theory.* New Trends in Non Linear Control Theory, J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori, D. Leborgne Eds., Springer Lecture Notes in Control and Information Sciences 122, (1989), p. 143–159.

[Ra7] J.-P. Ramis. *Filtration Gevrey sur le groupe de Picard–Vessiot d'une équation différentielle irrégulière.* Preprint Institute de Matematica Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 45 (1985), p. 1–38.

[RS1] J.-P. Ramis, Y. Sibuya. *Hukuhara's Domains and Fundamental Existence and Uniqueness Theorems for Asymptotic Solutions of Gevrey Type.* Asymptotics 2 (1989), p. 39–94.

[RS2] J.-P. Ramis, Y. Sibuya. *Asymptotic expansions with Gevrey estimates and cohomological methods.* livre en preparation.

[Sc] R. Schäffke. *On a Theorem of Y. Sibuya.* Letter to Y. Sibuya (1991).

[Si1] Y. Sibuya. *Linear Differential Equations in the Complex Domain: Problems of Analytic Continuation.* Transl. Mathematical Monographs, vol. 82, A.M.S. (1990)

[Si2] Y. Sibuya. *Gevrey property of Formal Solutions in a Parameter.* Preprint School of Mathematics, Univ. Minnesota, Minneapolis (1989).

[Si3] Y. Sibuya. *Gevrey Asymptotics and Stokes Multipliers.* Proceedings CADE 2, 1990, Academic Press (1991).

[Sti1] Stieltjes. *Recherches sur quelques séries semi-convergentes.* Ann. Sc. École Normale Sup., Paris (3), 3, 1886, p. 201–258.

[Sti2] Stieltjes. *Recherches sur les fractions continues.* Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse, t. VIII et IX 1894 et 1895, p. 1–122 et 1–47.

[Sto1] G. G. Stokes. *On the Numerical Calculation of a Class of Definite Integrals and Infinite Series.* Trans. Camb. Phil. Soc., vol. IX (1857).

[Sto2] G. G. Stokes. *On the Discontinuity of Arbitrary Constants which Appear in Divergent Developments.* Trans. Camb. Phil. Soc., vol. X (1857), p. 106–128.

[Sto3] G. G. Stokes. *Early Letters to Lady Stokes, London, March 17, 1857.* Memoirs and Scientific Correspondance, vol. 1, Cambridge University Press, (1907), p. 62.

[Th1] J. Thomann. *Resommation des séries formelles solutions d'équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre dans le champ complexe au voisinage de singularites irregulieres.* Numer. Math. 58 (1991), p. 503–535.

[Th2] J. Thomann. *Problèmes algorithmiques posés par la resommation.* Journées GRECO de Calcul Formel (1990).

[Tou1] J. C. Tougeron. *An introduction to the theory of Gevrey expansions and to the Borel–Laplace transform with some applications.* preprint Univ. Toronto, Canada (1990).

[Tou2] J. C. Tougeron. *Sur les ensembles analytiques-reels definis par des equations Gevrey au bord.* manuscrit, Rennes (1990).

[Tour] E. Tournier. *Solutions formelles d 'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel DESIR. Étude théorique et réalisation.* Thèse, Grenoble (1987).

[V] Vessiot. *Sur les équations différentielles linéaires.* Thèse, Ann. École Normale Supérieure (1891).

[Vo] A. Voros. *The Return of the Quartic Oscillator (the Complex WKB Method)*, Ann. Inst. H. Poincaré 29, 3 (1983).

[Wa] W. Wasow. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations.* Interscience Publishers New-York (1965), reprint Dover PubL, New-York (1987).

[Wat1] G. N. Watson. *The transformation of an asymptotic series into a convergent series of inverse factorials.* Circ. Math. Palermo Rend., 34 (1912), p. 41–88.

[Wat2] G. N. Watson. *A theory of Asymptotic Series.* Philosophical Transactions of the Royal Society of London, ser. A, vol. CCXI (1911), p. 279–313.

[Wat3] G. N. Watson. *The characteristics of Asymptotic Series.* Quart. J. Math., vol. XLIII (1912), p. 65–77.

[ZS] A. K. Zvonkin, M. A. Shubin. *Non Standard Analysis and Singular Perturbations of Ordinary Differential Equations.* Russian Math. Surveys. 39, 2 (1984), p. 69–131.

Рамис Жан-Пьер

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Корректор З. Ю. Соболева

Подписано в печать 29.06.02. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,65. Уч. изд. л. 4,13.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1.
Тираж 1000 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru
